

Lösungsvorschlag 4. Übungsblatt Theorie A WS 2009/2010

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis

www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1:

- (a) Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{e}_z - \alpha\vec{v}.$$

Trennen nach x - und z -Komponenten liefert:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -\alpha v_x, \\ m\dot{v}_z &= -mg - \alpha v_z. \end{aligned}$$

Für lange Zeiten erwartet man $\dot{v}_x = \dot{v}_z = 0$. Damit ergibt sich $v_x(t \rightarrow \infty) = 0$ und $v_z(t \rightarrow \infty) = -\frac{mg}{\alpha}$.

- (b) Für v_x findet man durch Separation der Variablen: $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\alpha}{m} dt \equiv -\gamma dt$. Integration dieser Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv'_x}{v'_x} &= \int_0^t -\gamma dt' \Leftrightarrow \ln(v_x) - \ln(v_{0x}) = -\gamma t \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{v_x}{v_{0x}} = -\gamma t \\ &\Leftrightarrow v_x = v_{0x} e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

Separation der Variablen liefert für v_z : $\frac{dv_z}{g + \gamma v_z} = -dt$. Durch Integrieren erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{v_{0z}}^{v_z} \frac{dv'_z}{g + \gamma v'_z} &= \int_0^t -\gamma dt \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{g + \gamma v_z}{g + \gamma v_{0z}} \right) = -t \\ &\Leftrightarrow \frac{g + \gamma v_z}{g + \gamma v_{0z}} = e^{-\gamma t} \\ &\Leftrightarrow v_z = \frac{g}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{\gamma v_{0z}}{g} \right) e^{-\gamma t} - 1 \right]. \end{aligned}$$

- (c) Die Bahnkurve findet man durch integrieren der Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v_x(t') dt' = x_0 + \int_0^t v_{0x} e^{-\gamma t'} dt' \\ &= x_0 - \frac{1}{\gamma} v_{0x} (e^{-\gamma t} - 1) \end{aligned}$$

für $x(t)$, und

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \int_0^t v_z(t') dt' = h + \int_0^t \frac{g}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{\gamma v_{0z}}{g} \right) e^{-\gamma t'} - 1 \right] dt' \\ &= h + \frac{g}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma v_{0z}}{g} \right) \int_0^t dt' e^{-\gamma t'} - \frac{gt}{\gamma} \\ &= h - \frac{gt}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \left(1 + \frac{\gamma v_{0z}}{g} \right) (e^{-\gamma t} - 1). \end{aligned}$$

für $z(t)$.

- (d) Für $t \rightarrow \infty$ findet man aus Aufgabe (c): $x_{\max} = \frac{v_{0x}}{\gamma}$.

- (e) Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion $e^{-\gamma t} \approx 1 - \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2} + \dots$ gilt für Zeiten $t \ll 1/\gamma$. Einsetzen im Ergebnis von Aufgabe (c) liefert:

$$z(t) \approx h + v_{0z}t + \frac{1}{2}(-\gamma v_{0z} - g)t^2$$

Aufgabe 2:

- (a) Die Bewegungsgleichung ist jetzt: $m\vec{v} = -mg\hat{e}_z - \beta\sqrt{v_x^2 + v_z^2}\vec{v}$. Trennen nach x - und z -Komponenten liefert:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -\beta\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_x, \\ m\dot{v}_z &= -mg - \beta\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_z. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für v_x und v_z sind jetzt gekoppelt, und man kann die beiden Gleichungen nicht mehr unabhängig voneinander betrachten. Das macht das Problem schwierig.

- (b) Für lange Zeiten erwartet man $\dot{v}_z = 0$, und daraus folgt $-\frac{mg}{\beta} = |v_z|v_z$. Man sieht also, dass $v_z(t \rightarrow \infty) < 0$, und $v_z(t \rightarrow \infty) = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}} \equiv -v_e$. Da $v_z(t=0) = 0$ ist auch $v_z(t) < 0$.
- (c) Separation der Variablen liefert die folgende Gleichung:

$$\frac{dv_z}{g + \frac{\beta}{m}|v_z|v_z} = -dt.$$

Integrieren wir diese Gleichung, und verwenden wir $v_z(t) < 0 \Rightarrow |v_z| = -v_z$, so finden wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{v_z} \frac{dv'_z}{g - \frac{\beta}{m}(v'_z)^2} = -t &\Leftrightarrow \frac{m}{\beta} \int_0^{v_z} \frac{dv'_z}{v_e^2 - (v'_z)^2} = -t \\ &\Leftrightarrow \frac{m}{\beta} \frac{1}{2v_e} \ln \left| \frac{v_e + v'_z}{v_e - v'_z} \right|_0^{v_z} = -t \end{aligned}$$

Nun ist $|v_z| < v_e$, und deswegen gilt $|v_e + v_z| = v_e + v_z$ und $|v_e - v_z| = v_e - v_z$. Damit ergibt sich:

$$\frac{v_e + v_z}{v_e - v_z} = e^{-2gt/v_e},$$

und daraus folgt:

$$v_z(t) = -v_e \left(\frac{1 - e^{-2gt/v_e}}{1 + e^{-2gt/v_e}} \right).$$

- (d) Durch Multiplizieren des Zählers und Nenners der obigen Gleichung mit e^{gt/v_e} ergibt sich:

$$v_z(t) = -v_e \left(\frac{e^{gt/v_e} - e^{-gt/v_e}}{e^{gt/v_e} + e^{-gt/v_e}} \right) = -v_e \tanh \left(\frac{gt}{v_e} \right).$$

- (e) Die Bahnkurve $z(t)$ findet man durch Integration von $v_z(t)$. In einer Integraltabelle findet man: $\int \tanh x = \ln \cosh x$. Damit ergibt sich:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t') dt' = h - \frac{v_e^2}{g} \ln \cosh \left(\frac{gt}{v_e} \right) + \frac{v_e^2}{g} \ln(1) = h - \frac{v_e^2}{g} \ln \cosh \left(\frac{gt}{v_e} \right).$$