5. Übung zur Vorlesung Theorie A — WS 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Abgabetermin: Mittwoch, 25.11.2009 vor 13.00 Uhr.

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator ohne Dämpfung: (3 + 3 Punkte)

Wir diskutieren die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad (A{,}B \text{ bekannt})$$

des linearen harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

(a) Zu welcher Zeit t_1 erreicht der Oszillator seine maximale Auslenkung $x_{\max}$? Wie groß ist $x_{\max}$? Welchen Wert hat die Beschleunigung zur Zeit t_1?
Hinweis: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ und $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

(b) Zu welcher Zeit t_2 erreicht der Oszillator seine maximale Geschwindigkeit $\dot{x}_{\max}$? Wie groß ist $\dot{x}_{\max}$? Wie groß ist die Auslenkung zur Zeit t_2? Welche einfache Beziehung besteht zwischen $x_{\max}$ und $\dot{x}_{\max}$?

Aufgabe 2: Gedämpfter harmonischer Oszillator: (4 Punkte)

Geben sie die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung für den gedämpften, harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit $\gamma < \omega_0$ (Schwingfall) unter den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ an. Die allgemeine Lösung lässt sich als Summe von Sinus und Kosinus, oder als Kosinus-Funktion mit einer Anfangsphase angeben. Lösen sie die Aufgabe für beide Darstellungen.

Aufgabe 3: Lineare, homogene Differentialgleichung vierter Ordnung: (3 Punkte)

Lösen sie die homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} - 2\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 3x = 0$$

mit Hilfe eines Exponentialansatzes. Für eine Differentialgleichung vierter Ordnung erwartet man 4 linear unabhängige Lösungen. Wie sieht die allgemeine, ***reelle*** Lösung aus?

Aufgabe 4: Die Delta-Funktion: (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen:

$$\Delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{für } |x| \le \epsilon/2 \\ 0 & \text{für } |x| > \epsilon/2 \end{cases}$$

(a) Zeichnen sie die Funktion Δ_ϵ für verschiedene (positive) Werte von ϵ. Was passiert wenn $\epsilon \to 0$?

(b) Berechnen sie $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\epsilon(x)\mathrm{d}x$.

(c) Jetzt betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\epsilon(x) f(x)\mathrm{d}x$$

mit einer beliebigen stetigen Funktion $f(x)$. Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt, dass es ein $x_\epsilon \in [-\epsilon/2, +\epsilon/2]$ gibt, für das gilt:

$$\int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} f(x)\mathrm{d}x = \epsilon f(x_\epsilon).$$

Verwenden sie diese Beziehung, um die Gleichung

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\epsilon(x) f(x)\mathrm{d}x = f(0) \tag{1}$$

zu beweisen.

Man sieht, dass das Integral (1) wohl definiert ist, obwohl $\lim_{\epsilon\to 0}\Delta_\epsilon(x)$ keine Funktion im eigentlichen Sinne darstellt. Trotzdem “definiert” man in der Physik eine “Funktion” $\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\Delta_\epsilon(x)$. Intuitiv gilt $\delta(0) = \infty$ und $\delta(x \neq 0) = 0$. Man sollte aber immer im Kopf behalten, dass diese sogenannte Dirac-δ Funktion entweder den Grenzfall einer regulären Funktion darstellt, und innerhalb eines Integrals definiert ist durch:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) = 1, \quad \text{und}$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) f(x) = f(0),$$

mit $x_1 < 0 < x_2$.

Die δ-Funktion wurde am Anfang des 20. Jahrhunderts durch Paul Dirac eingeführt. Die Physiker benutzten diese Funktion schon mehr als 50 Jahre, bevor die Mathematiker solche verallgemeinte Funktionen als “Distributionen” kennzeichneten, und ihre Eigenschaften formal mathematisch festlegten.

Die oben angegebenen Funktionen $\Delta_\epsilon(x)$ sind nur eine von vielen möglichen Darstellungen der δ-Funktion. Ein anderes Beispiel sind die Gauß'schen Funktionen $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/\sigma^2}$, die normiert sein ($\int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(x)\mathrm{d}x = 1$), und für die ebenfalls $\lim\limits_{\sigma\to 0} f_\sigma(x) = \delta(x)$ gilt.