

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator ohne Dämpfung

- (a) Den Zeitpunkt t_1 findet man aus $\dot{x}(t_1) = 0$ und $\ddot{x}(t_1) < 0$. Die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t), \\ \ddot{x}(t) &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t).\end{aligned}$$

Daraus findet man:

$$\dot{x}(t_1) = 0 \Leftrightarrow \tan(\omega_0 t_1) = \frac{B}{A} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arctan\left(\frac{B}{A}\right).$$

Mit den angegebenen Hinweis kann man jetzt

$$\begin{aligned}\sin(\omega_0 t_1) &= \frac{B/A}{\sqrt{1 + B^2/A^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \cos(\omega_0 t_1) &= \frac{1}{\sqrt{1 + B^2/A^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\end{aligned}$$

schreiben. Damit ergibt sich für die maximale Auslenkung $x_{\max} = x(t_1)$:

$$x_{\max} = \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{A^2 + B^2},$$

und für die Beschleunigung $\ddot{x}(t_1)$:

$$\ddot{x}(t_1) = -\omega_0^2 x_{\max} = -\omega_0^2 \sqrt{A^2 + B^2} < 0.$$

Die Beschleunigung $\ddot{x}(t_1)$ ist also negativ, und t_1 ist wirklich ein Maximum und kein Minimum.

- (b) Jetzt brauchen wir $\ddot{x}(t_2) = 0$ und $\frac{d^3 x}{dt^3}(t_2) < 0$. Daraus ergibt sich

$$\ddot{x}(t_2) = 0 \Leftrightarrow \tan(\omega_0 t_2) = -\frac{A}{B} \Leftrightarrow t_2 = -\frac{1}{\omega_0} \arctan\left(\frac{A}{B}\right).$$

Verwenden wir wieder den Hinweis, so bekommen wir

$$\begin{aligned}\sin(\omega_0 t_2) &= \frac{-A/B}{\sqrt{1 + A^2/B^2}} = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \cos(\omega_0 t_2) &= \frac{1}{\sqrt{1 + A^2/B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.\end{aligned}$$

Damit finden wir für $\dot{x}_{\max}$:

$$\dot{x}_{\max} = \dot{x}(t_2) = \omega_0 \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \omega_0 \sqrt{A^2 + B^2} = \omega_0 x_{\max}.$$

Die Auslenkung zur Zeit t_2 ist gegeben durch

$$x(t_2) = \frac{AB - BA}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Aufgabe 2 : Harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Die Lösung der Bewegungsgleichung kann man wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)), \quad \text{oder} \\ x(t) &= e^{-\gamma t} a \cos(\Omega t + \tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in die erste Gleichung liefert

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A = x_0, \\ \dot{x}(t=0) &= -\gamma A + B\Omega = v_0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich also $A = x_0$ und $B = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega}$.

Für die zweite Gleichung bekommt man durch Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= a \cos \tilde{\alpha} = x_0, \\ \dot{x}(0) &= -\gamma a \cos \tilde{\alpha} - a\Omega \sin \tilde{\alpha} = v_0. \end{aligned}$$

Das kann man umschreiben in

$$\begin{aligned} a \cos \tilde{\alpha} &= x_0, \\ -a \sin \tilde{\alpha} &= \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega}. \end{aligned}$$

Teilt man die zweite Gleichung durch die erste, findet man

$$\tan \tilde{\alpha} = \frac{v_0 + \gamma x_0}{-\Omega x_0}.$$

Quadriert man beide Gleichungen und zählt sie zusammen, bekommt man

$$a^2 (\cos^2 \tilde{\alpha} + \sin^2 \tilde{\alpha}) = a^2 = x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\Omega^2}.$$

Dadurch sind a und $\tilde{\alpha}$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3: Lineare, homogene Differentialgleichung vierter Ordnung

Wir machen einen Exponentialansatz $x(t) = ce^{\lambda t}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt dieser Ansatz eine Gleichung vierter Ordnung für λ :

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3 = 0.$$

Diese Gleichung kann man durch eine Substitution $\lambda^2 = x$ einfach lösen:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 3.$$

Daraus findet man vier Lösungen: $\lambda = \pm\sqrt{3}$ und $\lambda = \pm i$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist damit gegeben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t} + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it} \\ &= c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t} + c_3 (\cos t + i \sin t) + c_4 (\cos t - i \sin t) \\ &= c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t} + (c_3 + c_4) \cos t + i(c_3 - c_4) \sin t. \end{aligned}$$

Wählt man jetzt $c_3 = c_4^*$, so ist $c_3 + c_4 = 2 \operatorname{Re} c_4$ und $c_3 - c_4 = 2i \operatorname{Im} c_4$. Damit wird die Lösung reell.

Aufgabe 4: Die Delta-Funktion

(a)

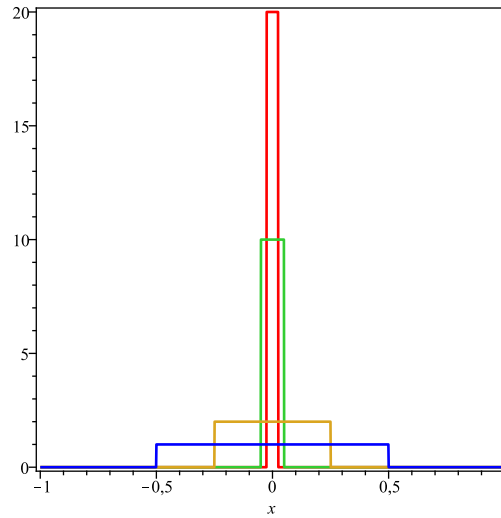


Figure 1: Die $\Delta_\epsilon(x)$ -Funktion für $\epsilon = 1.0; 0.5; 0.1; 0.05$.

(b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\epsilon(x) dx = \int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} \Delta_\epsilon(x) dx = \int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon} dx = 1.$$

(c)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\epsilon(x) f(x) dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} f(x) dx = f(x_\epsilon).$$
 Mit $x_\epsilon \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ folgt daraus das Ergebnis.