6. Übung zur Vorlesung Theorie A	Wintersemester 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie	
Prof. G. Schön - Dr. G. Metalidis	http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Abgabetermin: Mittwoch, 02.12.2009 vor 13.00 Uhr

Aufgabe 1: Das Mittelwellenradio

Ein Mittelwellenradiosender sendet ein Signal mit einer Trägerfrequenz ν aus. Die eingestrahlten Radiowellen induzieren eine oszillierende Spannung $V_0 \cos(\omega t)$ in der Antenne, wobei $\omega = 2\pi\nu$. Die Antenne wirkt als Wechselspannungsquelle für einen LCR-Stromkreis, und das für den Empfänger wichtige Signal ist die Spannung $V_C(t)$, die über dem Kondensator C abfällt. L ist die Induktivität, C die Kapazität und R der Widerstand des LCR-Stromkreises.

(a) Die Differentialgleichung für den LCR-Stromkreis,

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_0 \cos(\omega t),$$

kann in die Form der Gleichung für einen getriebenen harmonischen Oszillator,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \cos(\omega t)$$

gebracht werden. Was sind x, γ, ω_0, und f als Funktionen von R, C, L, V_0, und der Ladung Q auf dem Kondensator? (1 Punkt)

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung gegeben ist durch $x_p(t) = |\chi(\omega)|\, f\, \cos(\omega t + \phi)$, wobei

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right)^{1/2}}.$$

Für den Fall $\gamma \ll \omega_0$ wurden in der Vorlesung Ausdrücke für die Resonanzfrequenz $\omega_{\max} \approx \omega_0$, die maximale Amplitude $|\chi|_{\max} = |\chi(\omega_{\max})| \approx 1/(2\gamma\omega_0)$ und die Breite $|\chi(\omega)| \approx 2\gamma$ angegeben. Hier sollten diese Ergebnisse noch einmal in Detail hergeleitet werden.

- Für welche Kreisfrequenz $\omega_{\max}$ nimmt $|\chi(\omega)|$ sein Maximum an? (Betrachten sie den allgemeinen Fall, d.h. ohne die Annahme $\gamma \ll \omega_0$ zu verwenden) (1 Punkt)
- Wie groß ist $|\chi|_{\max}$ (im allgemeinen Fall)? (1 Punkt)
- Jetzt soll die Breite der Kurve $|\chi(\omega)|$ abgeschätzt werden. Schreiben sie dazu zunächst $\frac{|\chi(\omega)|}{|\chi|_{\max}}$ als Funktion der Variablen $\frac{\omega}{\omega_0}$und $\frac{\gamma}{\omega_0}$. Jetzt suchen sie eine Gleichung für die Frequenzen $\omega_\pm$ wofür $\left(\frac{|\chi(\omega_\pm)|}{|\chi|_{\max}}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Erst jetzt machen wir die Annahme $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$. Damit lässt sich der Ausdruck für $\frac{\omega_\pm}{\omega_0}$ vereinfachen, indem man eine Reihenentwicklung für die auftretenden Wurzelfunktionen macht: $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x + \ldots$ (solch eine Reihenentwicklung gilt nur für $x \ll 1$). Leiten sie einen einfachen Ausdruck für $\frac{\omega_\pm}{\omega_0}$ her, indem sie nur Terme behalten, die linear in $\frac{\gamma}{\omega_0}$ sind. Wie groß ist dann die Breite? (2 Punkte)

(c) Berechnen sie die Amplitude $V_{C,\max}$ der Kondensatorspannung $V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ als Funktion von V_0,γ und ω im Resonanzfall $\omega = \omega_0$ (unter der Annahme $\gamma \ll \omega_0$). Das Verhältnis $\frac{V_{C,\max}}{V_0}$ wird die Verstärkung des Stromkreises genannt. (1 Punkt)

(d) Eine andere Station sendet mit einer anderen Trägerfrequenz ν'. Wenn der Empfänger nach wie vor auf die erste Sendefrequenz ν (also $\omega_0 = \omega$) eingestellt ist, gilt die Resonanzbedingung nicht für die zweite Station; folglich werden deren Signale viel schwächer verstärkt als die der ersten, mit Amplitude $V'_{C,\max}$. Berechnen sie das Verhältnis der Verstärkungsamplituden, $\frac{V'_{C,\max}}{V_{C,\max}}$, als Funktion von $\frac{\omega'}{\omega}$und $\frac{\gamma}{\omega}$. Skizzieren sie $\frac{V'_{C,\max}}{V_{C,\max}}$ als Funktion von $\frac{\omega'}{\omega}$. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Getriebener harmonischer Oszillator im aperiodischen Grenzfall

Wir betrachten jetzt einen harmonischen Oszillator im aperiodischen Grenzfall ($\gamma = \omega_0$), getrieben durch eine Kraft $F(t)$.

(a) Suchen sie eine partikuläre Lösung für den Fall $F(t) = mf\mathrm{e}^{-\gamma t}$. Hinweis: Versuchen sie es mit $At^n\mathrm{e}^{-\lambda t}$ für $n = 0, 1, 2$. (1 Punkt)

(b) Bonusaufgabe: Suchen sie eine partikuläre Lösung für den Fall $F(t) = mf\mathrm{e}^{\gamma t}$. (1 Bonuspunkt)

(c) Bonusaufgabe: Verwenden sie die Ergebnisse der vorigen Aufgabe, um die allgemeine Lösung für den Fall $F(t) = mf\cosh(\gamma t)$ mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ zu finden. (1 Bonuspunkt)

Aufgabe 3: Eigenschaften der Delta-Funktion

(a) Zeigen sie, dass $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, indem sie die Beziehung

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x f(x)\delta(ax) = \frac{1}{|a|} f(0).$$

für beliebige $x_1 < 0 < x_2$ herleiten. (1 Punkt)

(b) Leiten die die Beziehung $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} = \delta(x)$ her, indem sie zeigen, dass der Ausdruck

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \alpha|k|} \right]$$

eine Darstellung der Delta-Funktion ist. Skizzieren sie hierzu das Ergebnis dieses Integrals für verschiedene Werte von $\alpha > 0$. Verstehen sie warum $\alpha > 0$ sein muss? (2 Punkte)

(c) Die Heavisidesche θ-Funktion ist durch

$$\theta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1/2 & \text{für } x = a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases}$$

definiert. Sie zeichnet sich durch einen Einheitssprung bei $x = a$ aus. Zeigen sie, dass die Ableitung der θ-Funktion die Dirac'sche δ-Funktion ergibt, d.h. dass $\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x)$ (im Sinne der Distributionen). Zeigen sie dazu, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} \cdot f(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

für beliebige $x_1 < 0 < x_2$ gilt. (Hinweis: Partielle Integration) (1 Punkt)