Abgabetermin: Mittwoch, 16.12.2009 vor 13.00 Uhr

Aufgabe 1: Fourier-Reihen (2 Punkte)

Jede periodische Funktion $f(t)$ mit Periode T kann in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\bar{\omega}t) + b_k \sin(k\bar{\omega}t) \right],$$

wobei $\bar{\omega} = 2\pi/T$. Die Koeffizienten lassen sich bestimmen aus

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T \mathrm{d}t f(t) \cos(k\bar{\omega}t), \qquad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T \mathrm{d}t f(t) \sin(k\bar{\omega}t).$$

Berechnen sie damit die Entwicklung der Sägezahnfunktion mit Periode 2π:

$$f(t) = t; \quad \text{für } -\pi < t < \pi \text{ und periodisch fortgesetzt.}$$

Aufgabe 2: Fourier-Transformation: Faltungstheorem (1+2 Punkte)

Die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(t)$ wird mit $\tilde{f}(\omega)$ bezeichnet:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Die Faltung $f_1 * f_2(t)$ zweier Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ ist durch folgendes Integral definiert:

$$f_1 * f_2(t) = F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' f_1(t') f_2(t - t').$$

(a) Zeigen sie, dass die Fourier-Transformierte der Faltung $f_1 * f_2(t)$ das Produkt $\tilde{f}_1(\omega) \cdot \tilde{f}_2(\omega)$ ist:

$$\tilde{F}(\omega) = \tilde{f}_1(\omega) \cdot \tilde{f}_2(\omega).$$

(b) Zeigen sie, dass die Fourier-Transformierte des Produktes $f_1(t) \cdot f_2(t)$ die Faltung $\frac{1}{2\pi} \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(\omega)$ ist.
Hinweis: Hierfür ist die Identität $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{d}x = 2\pi\delta(k)$ nützlich.

Aufgabe 3: Fourier-Transformation: Beispiele (2 Punkte + 2 Bonuspunkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\theta(t)$. Berechnen sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\omega)$ dieser Funktion.

(b) Bonusaufgabe: Die Gauß-Funktion ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Diese Funktion ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t+\mathrm{i}\alpha)^2}{2\sigma^2}} = 1, \tag{1}$$

für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeichnen sie die Gauß-Funktion $f(t)$ auf. Was ist die Bedeutung von σ? Berechnen sie jetzt die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\omega)$ dieser Funktion. Wie sieht $\tilde{f}(\omega)$ aus?
Hinweis: Der Integrand lässt sich durch quadratische Ergänzung in die Form (1) bringen.

Aufgabe 4: Drude-Formel (3 + 2 +3 Punkte)

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Elektrons mit Masse m und Ladung e, das sich in einem Metall unter Einfluss eines elektrischen Feldes $E(t)$ bewegt, kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$m\dot{v}(t) + m\frac{v(t)}{\tau} = eE(t).$$

Hierbei ist τ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen des Elektrons an Störstellen im Metall. Die Stromdichte ist durch $j(t) = env(t)$ gegeben (n ist die Elektronendichte). Durch Einsetzen der inversen Fourier-Transformation, $v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\tilde{v}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, lässt sich die Drude Formel $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ herleiten. Dabei ist $\tilde{\sigma}(\omega)$ die (frequenzabhängige) Leitfähigkeit.

(a) Berechnen sie $\tilde{\sigma}(\omega)$. Was ist die "Gleichstromleitfähigkeit" $\sigma_0 = \tilde{\sigma}(\omega = 0)$?

(b) Berechnen sie den Gleichstrom $\bar{j}$, d.h. den (zeitlich konstanten) Wert, den $j(t)$ für den Fall eines zeitlich konstanten elektrisches Feldes $E(t) = E_0$ liefert. Bestimmen sie dazu zunächst die Fourier-Transformierte $\tilde{E}(\omega)$ und daraus dann $j(t)$ durch inverse Fourier-Transformation.

(c) Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall eines beliebigen elektrische Feldes $E(t)$. Leiten sie aus der Beziehung $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ einen Ausdruck für $j(t)$ her, indem sie das Faltungstheorem und das Ergebnis aus Aufgabe 3(a) benutzen. Überprüfen sie mit diesem Ausdruck das Ergebnis von Teilaufgabe (b).