

Aufgabe 1: Fourier-Reihen

Die Periode dieser Funktion ist $T = 2\pi$, und damit ist $\bar{\omega} = 1$. Da die Funktion periodisch ist, dürfen wir auch von $-T/2$ bis $T/2$ integrieren (statt von 0 bis T). Wir berechnen zuerst die Koeffizienten b_k mit der angegebenen Formel, wobei wir das Integral mittels partieller Integration auswerten:

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t}{k} \cos(kt) \Big|_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(kt)}{k} dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{k} \cos(k\pi) + 0 \right] = -\frac{2}{k} (-1)^k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}.$$

Die Koeffizienten a_k sind alle gleich 0, da $f(t)$ wegen $f(t) = f(-t)$ eine ungerade Funktion ist, $\cos(kt)$ jedoch eine gerade Funktion; damit ist auch das Produkt $t \cos(kt)$ dieser beiden Funktionen ungerade. Das Integral einer ungeraden Funktion verschwindet über dem symmetrischen Intervall $[-\pi, +\pi]$, und es gilt also $a_k = 0$. Damit lautet die Fourier-Reihe dieser Funktion:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin(kt).$$

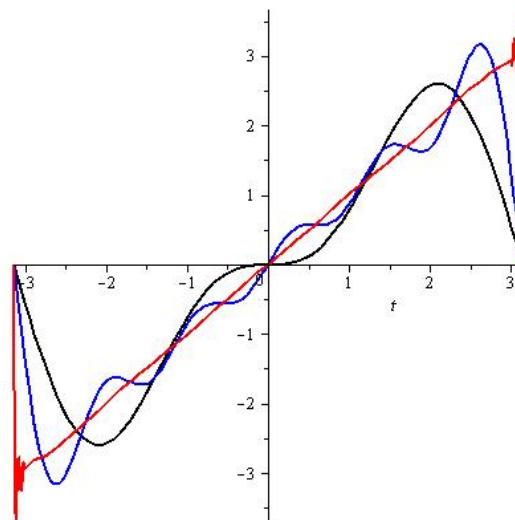


Figure 1: Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion mit $k = 1..k_{\max}$. Die Anzahl der Terme in der Summe ist $k_{\max} = 2$ (schwarz), $k_{\max} = 5$ (blau) und $k_{\max} = 100$ (rot).

Aufgabe 2: Fourier-Transformation: Faltungstheorem

- (a) Die Fourier-Transformierte der Faltung $(f_1 * f_2)(t)$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt (f_1 * f_2)(t) \cdot e^{-i\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1(t') f_2(t - t') \right] \cdot e^{-i\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1(t') \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt f_2(t - t') e^{-i\omega t} \right].\end{aligned}$$

Nun machen wir eine Variablensubstitution: $t - t' = t''$ (und t' bleibt t'), und bekommen:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1(t') \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt'' f_2(t'') e^{-i\omega(t'+t'')} \right] \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1(t') e^{-i\omega t'} \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt'' f_2(t'') e^{-i\omega t''} \right] \\ &= \tilde{f}_1(\omega) \cdot \tilde{f}_2(\omega).\end{aligned}$$

- (b) Wir berechnen die Fourier-Transformierte von $f_1(t) \cdot f_2(t)$, wobei wir für $f_1(t)$ und $f_2(t)$ jeweils deren Fourier-Transformierten einsetzen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dt f_1(t) \cdot f_2(t) e^{-i\omega t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{f}_1(\omega') e^{i\omega' t} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'' \tilde{f}_2(\omega'') e^{i\omega'' t} \right) \right] e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{f}_1(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'' \tilde{f}_2(\omega'') \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(\omega' + \omega'' - \omega)t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{f}_1(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'' \tilde{f}_2(\omega'') \delta(\omega' + \omega'' - \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{f}_1(\omega') \tilde{f}_2(\omega - \omega') \\ &= \frac{1}{2\pi} (\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2)(\omega)\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Fourier-Transformation: Beispiele

(a) $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \theta(t) e^{-t/\tau} e^{-i\omega t} = \int_0^{+\infty} dt e^{-(1/\tau + i\omega)t} = \frac{-1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} e^{-(1/\tau + i\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} = \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega}.$

(b)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (t^2 + i\omega t 2\sigma^2)}.\end{aligned}$$

Nun schreiben wir: $t^2 + i\omega t 2\sigma^2 = (t + i\omega\sigma^2)^2 + \omega^2\sigma^4$, und damit:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (t+i\omega\sigma^2)^2} \\ &= e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} \cdot 1 \\ &= e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}.\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion ist wieder eine Gauß-Funktion, aber die Breite ist $1/\sigma$.

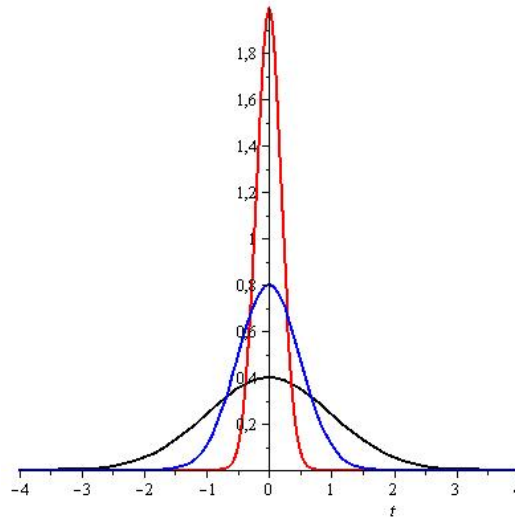


Figure 2: Die Gauß-Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, mit $\sigma = 1$ (schwarz), $\sigma = 0.5$ (blau) und $\sigma = 0.2$ (rot). σ ist die Breite der Funktion.

Aufgabe 4: Drude Formel

- (a) Wir schreiben $v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{v}(\omega) e^{i\omega t}$. Damit ergibt sich: $\dot{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{v}(\omega) (i\omega) e^{i\omega t}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[im\omega + \frac{m}{\tau} \right] \tilde{v}(\omega) e^{i\omega t} = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t}.$$

Dieser Gleichung muss für beliebige Zeiten t gelten, und daher können wir die Integranden gleich setzen:

$$\left[im\omega + \frac{m}{\tau} \right] \tilde{v}(\omega) = e \tilde{E}(\omega),$$

und damit:

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{e \tilde{E}(\omega)}{m(i\omega + \frac{1}{\tau})}.$$

Das ergibt $\tilde{j}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \tilde{E}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{E}(\omega)$, mit

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{i\omega\tau + 1}.$$

Die Gleichstromleitfähigkeit ist $\tilde{\sigma}(\omega = 0) = \frac{ne^2\tau}{m}$.

- (b) In diesem Fall ist $\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_0 e^{-i\omega t} = E_0 2\pi \delta(\omega)$. Damit ist $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) E_0 \delta(\omega)$. Durch eine inverse Fourier-Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned} j(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{j}(\omega) e^{i\omega t} \\ &= \frac{ne^2\tau}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{E_0}{i\omega\tau + 1} 2\pi \delta(\omega) e^{i\omega t} \\ &= \frac{ne^2\tau}{m} E_0. \end{aligned}$$

- (c) Wenn $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{E}(\omega)$, dann wissen wir aus Aufgabe 2(a), dass $j(t)$ gegeben ist durch

$$j(t) = (\sigma * E)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sigma(t') E(t - t').$$

In Aufgabe 3(a) haben wir ausgerechnet, dass die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-t/\tau} \theta(t)$ gleich $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}}$ ist. Nun hat aber $\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{i\omega + \tau}$ genau die gleiche Form. Deswegen ist klar, dass $\sigma(t) = \frac{ne^2}{m} e^{-t/\tau} \theta(t)$ sein muss. Wir bekommen damit für $j(t)$:

$$j(t) = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-t'/\tau} \theta(t') E(t - t') = \frac{ne^2}{m} \int_0^{+\infty} dt' e^{-t'/\tau} E(t - t').$$

Für ein konstantes elektrisches Feld $E(t) = E_0$, erhalten wir

$$j(t) = \frac{ne^2}{m} E_0 \int_0^{+\infty} dt' e^{-t'/\tau} = -\frac{ne^2\tau}{m} E_0 e^{-t'/\tau} \Big|_0^{+\infty} = \frac{ne^2\tau}{m} E_0.$$

Das ist genau das Ergebnis das wir schon in Teilaufgabe (b) gefunden haben.