Abgabetermin: Mittwoch, 13.01.2009 vor 13.00 Uhr.
Hinweis: Die Probeklausur findet am Freitag, den 08.01.2010 um 16:00 im Gaede-Hörsaal (Nachname beginnend mit A-G) bzw. im Gerthsen-Hörsaal (Nachname beginnend mit H-Z) statt. Als Hilfsmittel ist ein auf einer Seite handbeschriebenes A4-Blatt zugelassen. Die Rückgabe und Besprechung der Probeklausur findet am Freitag, den 15.01.2010 in den Tutorien statt.

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator (1+2 Punkte)

Wir betrachten den gedämpften harmonischen Oszillator mit Auslenkung $x(t)$, getrieben durch eine harmonische Kraft $f(t) = f_0 \cos(\bar{\omega} t)$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\omega)$ der Kraft $f(t)$.

(b) Leiten Sie einen Ausdruck für $\tilde{x}(\omega)$ her, und bestimmen Sie damit $x(t)$ durch inverse Fourier-Transformation.

Aufgabe 2: Gradient, Divergenz, und Rotation (10 Punkte)

Das Symbol $\frac{\partial}{\partial x}$ stellt eine partielle Ableitung einer Funktion $f(\vec{r})$ (mit $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$) nach x dar, bei deren Ausführung die anderen Variablen y und z als Konstanten behandelt werden.
Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist ein Vektor-Operator der wie folgt definiert ist: $\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$.

(a) Angewandt auf eine Funktion $f(x, y, z)$ ergibt das einen Vektor

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \text{grad } f = \hat{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z},$$

den man Gradient von f nennt. Beweisen Sie anhand dieser Definition, dass

- $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$ wobei $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (1 Punkt)
- $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$. (1 Punkt)
- $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$, wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist. (1 Punkt)

(b) Mit dem Nabla-Operator kann man auch ein Skalarprodukt $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ bilden, wenn die Funktion $\vec{g}(\vec{r}) = g_x(\vec{r})\hat{e}_x + g_y(\vec{r})\hat{e}_y + g_z(\vec{r})\hat{e}_z$ selbst ein Vektor ist:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \text{div } \vec{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}.$$

Das Ergebnis ist ein Skalar, und man nennt $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ die Divergenz von $\vec{g}$. Berechnen Sie jetzt

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ (1 Punkt)

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{a})$ ($\vec{a}$ ist unabhängig von x, y, z) (1 Punkt)

(c) Bildet man das Kreuzprodukt $\vec{\nabla} \times \vec{g}$, bekommt man wieder einen Vektor, den man die Rotation von $\vec{g}$ nennt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \text{rot } \vec{g} = \left[\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}\right] \hat{e}_x + \left[\frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\right] \hat{e}_y + \left[\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}\right] \hat{e}_z.$$

Zeigen Sie, dass:

- $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$ (1 Punkt)
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$, d.h. die Rotation des Gradienten einer Funktion ist gleich Null. (1 Punkt)

(d) Eine Kraft, für die $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ gilt, ist konservativ. Aus der letzten Teilaufgabe folgt dann, dass jede Kraft $\vec{F}$, die man als Gradient einer potenziellen Energie U schreiben kann, $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, konservativ ist.

- Zeigen Sie, dass jede Zentralkraft, d.h. jede Kraft der Form $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} f(r)$, konservativ ist, indem Sie zeigen dass $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. (2 Punkte)
- Zeigen Sie, dass für die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{a}$ gilt: $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Wegintegrale (2+1+2 Bonus)

In 3 Dimensionen ist die von der Kraft $\vec{F}$ längs der Bahnkurve C zwischen zwei Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ geleistete Arbeit A_{12} definiert durch:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

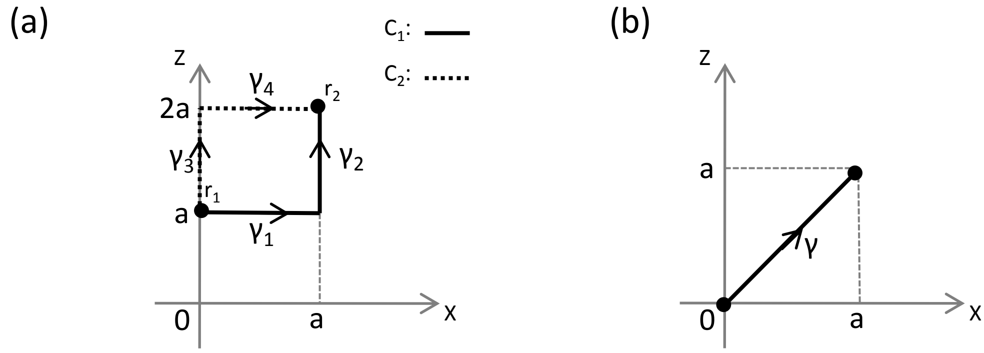
Dabei ist das Differential $\mathrm{d}\vec{r}$ gegeben durch $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \hat{e}_x + \mathrm{d}y \hat{e}_y + \mathrm{d}z \hat{e}_z$. Damit lässt sich $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$ schreiben, und das obige Integral reduziert sich auf 3 gewöhnliche Integrale entlang der Bahnkurve C.

(a) Wir betrachten jetzt die in der Abbildung (a) gezeigte Bahnen C_1 und C_2 zwischen den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Die Bahnkurven liegen in der x-z-Ebene ($y = 0$). Berechnen Sie die Arbeit, die von der Kraft $\vec{F}$ längs dieser beide Bahnkurven geleistet wird, wobei die Kraft $\vec{F}$ gegeben ist durch:

- $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$
- $\vec{F} = \vec{r} \times \vec{a}$

Teilen Sie dazu die Bahnkurven in Teilkurven auf ($C_1 = \gamma_1 + \gamma_2$, $C_2 = \gamma_3 + \gamma_4$ siehe Skizze), und berechnen Sie die Wegintegrale entlang dieser Teilkurven. Beispiel: $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^a F_x(x, y = 0, z = a) \mathrm{d}x = \ldots$. Prüfen Sie, ob die Arbeit entlang beider Wegen gleich ist.

(b) Bonusaufgabe: Berechnen Sie für die Kraft $\vec{F} = -mg\hat{e}_z$ die Arbeit die entlang der Kurve γ in Abbildung (b) geleistet wird, indem Sie den Weg geeignet parametrisieren.


(a)
c_1:
c_2:
z
γ_4
r_2
2a
γ_3
γ_2
r_1
a
γ_1
0
a
x
(b)
z
a
γ
0
a
x