

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator

- (a) $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} f_0 \cos(\bar{\omega}t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} f_0 \frac{e^{i\bar{\omega}t} + e^{-i\bar{\omega}t}}{2} = \frac{f_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt [e^{-i(\omega-\bar{\omega})t} + e^{-i(\omega+\bar{\omega})t}]$.
 Mit $\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(\omega)$ bekommen wir:

$$\tilde{f}(\omega) = f_0\pi [\delta(\omega - \bar{\omega}) + \delta(\omega + \bar{\omega})].$$

- (b) Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators lautet: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. Da die Fouriertransformierte von $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ gleich $(i\omega)^n \tilde{x}(\omega)$ ist, bekommen wir durch Fouriertransformation der Bewegungsgleichung:

$$-\omega^2 \tilde{x}(\omega) + 2\gamma i\omega \tilde{x}(\omega) + \omega_0^2 \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega).$$

Daraus ergibt sich

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}.$$

Mit $\tilde{f}(\omega) = f_0\pi [\delta(\omega - \bar{\omega}) + \delta(\omega + \bar{\omega})]$ bekommen wir durch Rücktransformation:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} \\ &= \frac{f_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{[\delta(\omega - \bar{\omega}) + \delta(\omega + \bar{\omega})] e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \\ &= \frac{f_0}{2} \left[\frac{e^{i\bar{\omega}t}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2 + 2i\gamma\bar{\omega}} + \frac{e^{-i\bar{\omega}t}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2 - 2i\gamma\bar{\omega}} \right] \\ &= \frac{f_0}{2} 2\text{Re} \left[\frac{e^{i\bar{\omega}t}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2 + 2i\gamma\bar{\omega}} \right] \\ &= f_0 \text{Re} \left[\frac{e^{i\bar{\omega}t} (\omega_0^2 - \bar{\omega}^2 - 2i\gamma\bar{\omega})}{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \bar{\omega}^2} \right] \\ &= f_0 \left[\frac{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) \cos(\bar{\omega}t) + 2\gamma\bar{\omega} \sin(\bar{\omega}t)}{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \bar{\omega}^2} \right]. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man wieder umschreiben als $x(t) = \frac{\cos(\bar{\omega}t + \phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \bar{\omega}^2}}$, wobei $\tan \phi = \frac{2\gamma\bar{\omega}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}$.

Aufgabe 2: Gradient, Divergenz, und Rotation

- (a) Wir berechnen die x-, y-, und z-Komponenten:

• $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$. Für die y- und z-Komponenten finden wir analog: $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$,
 und $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$. Damit ergibt sich

$$\vec{\nabla} r = \frac{x}{r} \hat{e}_x + \frac{y}{r} \hat{e}_y + \frac{z}{r} \hat{e}_z = \frac{\vec{r}}{r}.$$

- $\frac{\partial 1/r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = -\frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} 2x = -\frac{x}{r^3}$. Die anderen Komponenten lassen sich analog berechnen, und wir bekommen

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{-x\hat{e}_x - y\hat{e}_y - z\hat{e}_z}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

- $\frac{\partial(a_x x + a_y y + a_z z)}{\partial x} = a_x$, und analog für y- und z-Komponenten. Also

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z = \vec{a}.$$

(b) Für die Divergenz bekommen wir

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$.
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) = \frac{\partial(ya_z - za_y)}{\partial x} + \frac{\partial(za_x - xa_z)}{\partial y} + \frac{\partial(xa_y - ya_x)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$.

(c) Für die Rotation erhalten wir:

- $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right] \hat{e}_x + \left[\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right] \hat{e}_y + \left[\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right] \hat{e}_z = 0$.
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \right) = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \hat{e}_x + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \hat{e}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] \hat{e}_z = 0$, weil $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ und so weiter.

(d) Konservative Kräfte

•

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times [\vec{r}f(r)] &= \vec{\nabla} \times [xf(r)\hat{e}_x + yf(r)\hat{e}_y + zf(r)\hat{e}_z] \\ &= \left[\frac{\partial zf(r)}{\partial y} - \frac{\partial yf(r)}{\partial z} \right] \hat{e}_x + \left[\frac{\partial xf(r)}{\partial z} - \frac{\partial zf(r)}{\partial x} \right] \hat{e}_y + \left[\frac{\partial yf(r)}{\partial x} - \frac{\partial xf(r)}{\partial y} \right] \hat{e}_z \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir die Kettenregel: $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$, und analog für die Ableitungen nach y und z (siehe Teilaufgabe (a)). Einsetzen dieses Ergebnisses liefert:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times [\vec{r}f(r)] &= \left[\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r} \right] \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{e}_x + \left[\frac{xz}{r} - \frac{zx}{r} \right] \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{e}_y + \left[\frac{yx}{r} - \frac{xy}{r} \right] \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{e}_z \\ &= 0. \end{aligned}$$

- $\vec{r} \times \vec{a} = [ya_z - za_y] \hat{e}_x + [za_x - xa_z] \hat{e}_y + [xa_y - ya_x] \hat{e}_z$, und damit $\vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{a}) = [-a_x - a_x] \hat{e}_x + [-a_y - a_y] \hat{e}_y + [-a_z - a_z] \hat{e}_z = -2\vec{a}$.

Aufgabe 3: Wegintegrale

(a) Wir betrachten das Wegintegral mit der konservativen Kraft $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ entlang den Teilkurven γ_i :

- $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a F_x(x, y=0, z=a) dx = -\int_0^a \frac{x}{(x^2+0^2+a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{2} \int_a^{2a^2} \frac{dx'}{x'^{3/2}} = x'^{-1/2} \Big|_a^{2a^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)$.
- $\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^{2a} F_z(x=a, y=0, z) dz = -\int_a^{2a} \frac{z}{(a^2+0^2+z^2)^{3/2}} dz = -\frac{1}{2} \int_{2a^2}^{5a^2} \frac{dz'}{z'^{3/2}} = z'^{-1/2} \Big|_{2a^2}^{5a^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

- $\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^{2a} F_z(x=0, y=0, z) dz = - \int_a^{2a} \frac{z}{(0^2+0^2+z^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{2} \int_{a^2}^{4a^2} \frac{dz'}{z'^{3/2}} = z'^{-1/2} \Big|_{a^2}^{4a^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} - 1 \right).$
- $\int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a F_x(x, y=0, z=2a) dx = - \int_0^a \frac{x}{(x^2+0^2+4a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{2} \int_{4a^2}^{5a^2} \frac{dx'}{x'^{3/2}} = x'^{-1/2} \Big|_{4a^2}^{5a^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right).$

Man sieht also, dass $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Für konservative Kräfte ist das Wegintegral zwischen zwei Punkten unabhängig vom Weg zwischen den Punkten.

Für die nicht-konservative Kraft $\vec{F} = \vec{r} \times \vec{a}$, erhalten wir:

- $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a F_x(x, y=0, z=a) dx = - \int_0^a aa_y dx = -a^2 a_y.$
- $\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^{2a} F_z(x=a, y=0, z) dz = \int_a^{2a} aa_y dz = a^2 a_y.$
- $\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^{2a} F_z(x=0, y=0, z) dz = \int_a^{2a} 0 dx = 0.$
- $\int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a F_x(x, y=0, z=2a) dx = - \int_0^a 2aa_y dx = -2a^2 a_y.$

Man sieht, dass hier die Wegintegrale $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ und $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nicht gleich sein. Das Integral zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ hängt vom Weg ab.

(b) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a F_z dz = \int_0^a -mg dz = -mga.$