10. Übung zur Vorlesung Theorie A	Wintersemester 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie	
Prof. G. Schön - Dr. G. Metalidis	http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Abgabetermin: Mittwoch, 20.01.2009 vor 13.00 Uhr.

Aufgabe 1: Eindimensionales Potential

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Potential

$$U(x) = U_0(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^2.$$

(a) Skizzieren Sie das Potential. (1 Punkt)

(b) Bei $t = 0$ startet das Teilchen im Punkt $x(t = 0) = 0$, mit positive Geschwindigkeit. Das Teilchen hat eine totale Energie E. Verwenden Sie die Skizze aus Teilaufgabe (a), um vorherzusagen wie die Bewegung verläuft, wenn $0 < E < U_0$ (qualitativ, ohne Rechnung)? Welche charakteristischen Bahnpunkte gibt es? Bestimmen Sie diese. (2 Punkte)

(c) Wie verläuft (qualitativ) die Bewegung, wenn $E > U_0$? (1 Punkt)

Aufgabe 2: Ball in einem quartischen Potential

Ein Ball rollt zwischen den beiden Maxima ($\pm x_1$) eines quartischen Potentials,

$$U(x) = bx^2 - cx^4,$$

mit $b, c > 0$.

(a) Skizzieren Sie das Potential $U(x)$. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie die Punkte $\pm x_1$, wo $U(x)$ sein Maximum erreicht. (1 Punkt)

(c) Wir betrachten jetzt den Spezialfall $E = U(x_1)$ (d.h. die Gesamtenergie entspricht der Energie eines am Maximum des Potentials ruhenden Teilchens). Zeigen Sie, dass Energieerhaltung folgenden Ausdruck für $\dot{x}$ liefert: (1 Punkt)

$$(\dot{x})^2 = \frac{2c}{m}(x_1^2 - x^2)^2.$$

(d) Zeigen Sie (durch Separation der Variablen), dass die Lösung $x(t)$, mit Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$ (wobei $-x_1 < x_0 < 0$), wie folgt lautet: (2 Punkte)

$$x(t) = x_1 \tanh\left[x_1\sqrt{\frac{2c}{m}}t + \operatorname{arctanh}\left(\frac{x_0}{x_1}\right)\right].$$

(e) Bestimmen und skiziieren Sie die Zeit t_0, die der Ball braucht, um das Minimum zu erreichen (d.h. $x(t_0) = 0$), als Funktion von x_0. Was passiert für $x_0 \to -x_1$? Verstehen Sie das physikalisch? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Die Taylor-Entwicklung

In der Physik braucht man häufig eine vereinfachte Darstellung einer komplizierten Funktion in der Nähe eines bestimmten Punktes. Beispielsweise um zu verstehen wie eine Funktion sich für bestimmte Grenzwerte verhält. Die Taylor-Entwicklung erlaubt solch eine vereinfachte Darstellung im Form einer Potenzreihe. Sie ist wie folgt definiert:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, dann heißt die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} T_f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

die Taylor-Entwicklung von f mit Entwicklungspunkt a. $f^{(n)}(a)$ ist die n-te Ableitung der Funktion f an der Stelle a (mit $f^{(0)}(a) = f(a)$). Die Konvergenz dieser Reihe wird hier nur formal angenommen. Lässt man die Entwicklung nur bis zum n-ten Glied laufen, so spricht man von einer Entwicklung n-ten Grades von f bei a.

Berechnen Sie jetzt die Taylorentwicklung folgender Funktionen bis zum dritten Glied:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, an der Stelle $a = 0$. (1 Punkt)

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, an der Stelle $a = 0$. (1 Punkt)

(c) $f(x) = \ln(x)$, an der Stelle $a = 1$. (1 Punkt)

(d) Bonusaufgabe: Machen Sie eine Taylorentwicklung von $\sin(x)$ bis zur dritten Ordnung, um die Gleichung $x^2 = \sin(x)$ näherungsweise zu lösen. (2 Bonuspunkte)