

Lösungsvorschlag 10. Übungsblatt Theorie A WS 2009/2010 Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis

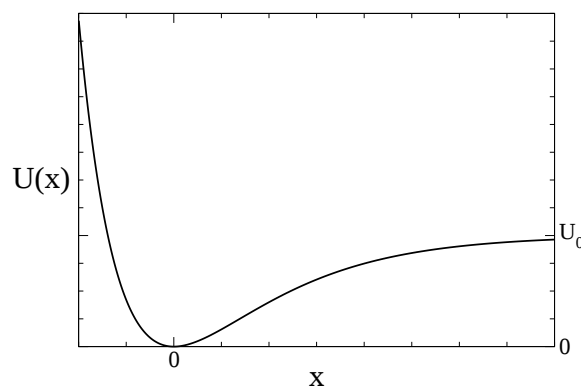
www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1

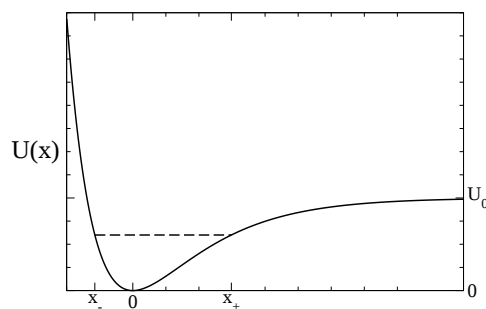
- (a) Das Potential $U(x)$ hat ein Minimum am Ursprung. Wir untersuchen das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

Für $x \rightarrow \infty$ gilt: $e^{-\alpha x} \rightarrow 0$, und damit $U(x) \rightarrow U_0$. Für $x \rightarrow -\infty$ hingegen gilt $e^{-\alpha x} \rightarrow \infty$, und damit $U(x) \rightarrow \infty$.

Das Potential sieht folgendermaßen aus:



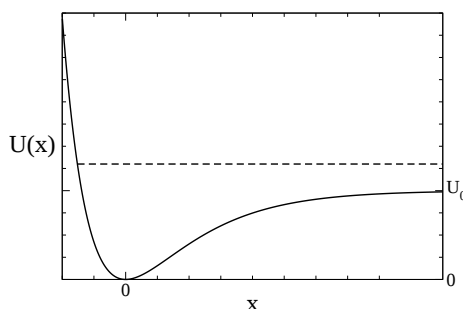
- (b) Wir zeichnen die Energie $E < U_0$ in das Schaubild ein: Aufgrund der Energieerhaltung



$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ ist die Bewegung des Teilchens auf die Bereiche mit $U(x) < E$ beschränkt. Wenn das Teilchen anfänglich eine positive Geschwindigkeit besitzt, wird es bis zur Stelle x_+ gelangen (siehe Skizze) und sich dann in umgekehrter Richtung bewegen, bis es die Stelle x_- erreicht, dort wieder umkehrt, usw.. Das Teilchen wird also zwischen den beiden Stellen x_- und x_+ oszillieren, die durch die Bedingung $E = U(x_{\pm})$ bestimmt sind:

$$\begin{aligned} U(x_{\pm}) &= E \Rightarrow U_0 (1 - e^{-\alpha x_{\pm}})^2 = E \Rightarrow 1 - e^{-\alpha x_{\pm}} = \pm \sqrt{\frac{E}{U_0}} \\ \Rightarrow e^{-\alpha x_{\pm}} &= 1 \pm \sqrt{\frac{E}{U_0}} \Rightarrow x_{\pm} = -\frac{1}{\alpha} \ln 1 \pm \sqrt{\frac{E}{U_0}} \end{aligned}$$

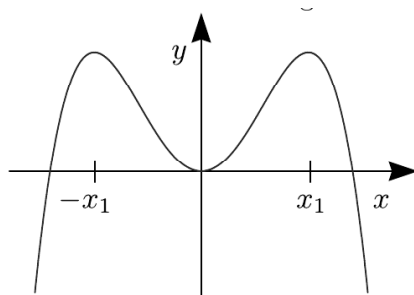
- (c) Wir zeichnen die Energie $E > U_0$ in das Schaubild ein: Das Teilchen bewegt sich in positive



Richtung. Da nun $U(x) < U_0 < E$ für $x > 0$ gilt, kann das Teilchen den Potentialtopf verlassen und wird sich mit nahezu konstanter Geschwindigkeit in positiver Richtung entlang der x-Achse bewegen.

Aufgabe 2

- (a) In der Nähe des Ursprungs $x = 0$ ist der Verlauf des Potentials durch den quadratischen Term bestimmt: $U(x) \approx bx^2$. Für $x \rightarrow \pm\infty$ dominiert der Term $\sim x^4$, und es gilt: $U(x) \rightarrow -\infty$. Das Potential sieht folgendermaßen aus:



- (b) Wir berechnen die Extremstellen von $U(x)$: Aus der Bedingung $U'(x) = 2bx - 4cx^3 = 0$ folgt: $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{\frac{b}{2c}}$. Bei $x = 0$ handelt es sich um die Minimalstelle des Potentials, die Stellen $x = \pm x_1$ mit

$$x_1 = \sqrt{\frac{b}{2c}}$$

die Maximalstellen von $U(x)$.

- (c) Aus der Energieerhaltung $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ und der Bedingung $E = U(x_1) = bx_1^2 - cx_1^4$ folgt:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + bx^2 - cx^4 = bx_1^2 - cx_1^4 \Leftrightarrow \dot{x}^2 = \frac{2c}{m} \left[\frac{b}{c}x_1^2 - x_1^4 - \frac{b}{c}x^2 + x^4 \right]$$

Aus $x_1 = \sqrt{\frac{b}{2c}}$ folgt $\frac{b}{c} = 2x_1^2$. Wenn wir das obige Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\dot{x}^2 = \frac{2c}{m} [2x_1^2 \cdot x_1^2 - x_1^4 - 2x_1^2 \cdot x^2 + x^4] \Leftrightarrow \dot{x}^2 = \frac{2c}{m} (x_1^2 - x^2)^2$$

- (d) Aus $\dot{x}^2 = \frac{2c}{m} (x_1^2 - x^2)^2$ folgt $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2c}{m}} (x_1^2 - x^2)$. Wir betrachten im Folgenden den Fall einer positiven Anfangsgeschwindigkeit, d.h. $\frac{dx}{dt} > 0$. Damit erhalten wir mit Hilfe der

Methode der Separation der Variablen:

$$\int_0^t dt' = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2c}{m}(x_1^2 - x'^2)}} dx' \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2c}} \frac{1}{x_1} \left[\operatorname{arctanh} \left(\frac{x'}{x_1} \right) \right]_{x_0}^x$$

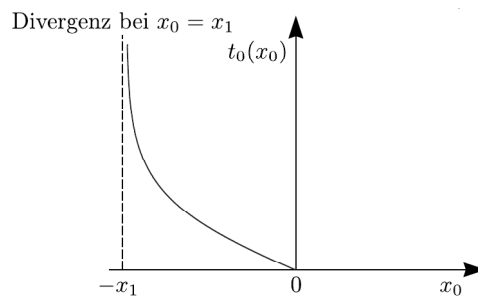
wobei wir verwendet haben, dass $\frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x}{a} \right)$ die Stammfunktion von $\frac{1}{a^2 - x^2}$ ist. Auflösen nach x ergibt die Lösung

$$x(t) = x_1 \tanh \left(x_1 \sqrt{\frac{2c}{m}} t + \operatorname{arctanh} \left(\frac{x_0}{x_1} \right) \right)$$

(e) Wir setzen $x(t) = 0$, woraus folgt: $x_1 \sqrt{\frac{2c}{m}} t + \operatorname{arctanh} \left(\frac{x_0}{x_1} \right) = 0$, und damit:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2c}} \frac{1}{x_1} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x_0}{x_1} \right)$$

Wir skizzieren $t(x_0)$: Für $x_0 \rightarrow -x_1$ gilt $\operatorname{arctanh} \left(\frac{x_0}{x_1} \right) \rightarrow -\infty$, und damit $t \rightarrow \infty$. Es dauert



unendlich lange, bis der Ball losrollt.

Aufgabe 3

Die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung ist gegeben durch: $T_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3$

(a) Die ersten drei Ableitungen von $f(x) = e^{-x}$ sind: $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$ und $f^{(3)}(x) = -e^{-x}$. Durch Einsetzen von $a=0$ ergibt sich damit:

$$T_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

(b) Die ersten drei Ableitungen von $f(x) = \sqrt{1+x}$ sind: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ und $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8(1+x)^{\frac{5}{2}}}$. Durch Einsetzen von $a=0$ ergibt sich damit:

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

(c) Die ersten drei Ableitungen von $f(x) = \ln(x)$ sind: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ und $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$. Durch Einsetzen von $a=1$ ergibt sich damit:

$$T_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Wir entwickeln $\sin(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 0$: $\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3$. Die Gleichung $x^2 = \sin(x)$ wird damit zu $x - \frac{1}{6}x^3 = x^2$, woraus folgt: $x = 0$ oder $1 - \frac{1}{6}x^2 = x$. Daraus ergeben sich die gesuchten Lösungen:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{15}$$