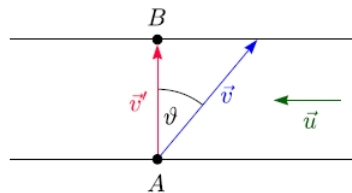


Aufgabe 1: Relativbewegung

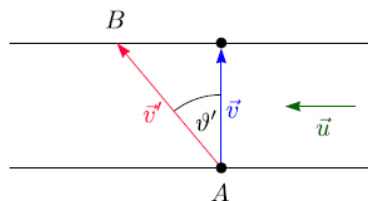
- (a) Das Boot erreicht den Punkt direkt gegenüber des Startpunktes, wenn sich die Geschwindigkeitskomponente $v_x \hat{e}_x$ (parallel zur Geschwindigkeit des Flusses) und $\vec{u}$ selbst gegenseitig kompensieren:

$$v_x - u = 0 \Rightarrow v \sin \theta = u \Rightarrow \theta = \arcsin \left(\frac{u}{v} \right).$$



- (b) Im Bezugssystem des Flusses wird die Zeit genau dann minimal, wenn wir den geradlinigen Weg senkrecht zum Ufer wählen. Es muss also $v = v_y$ und $v_x = 0$ sein. Rechnen wir die Geschwindigkeiten zurück ins Bezugssystem des Ufers, so gilt $v'_x = -u$ und $v'_y = v$ und damit erhalten wir:

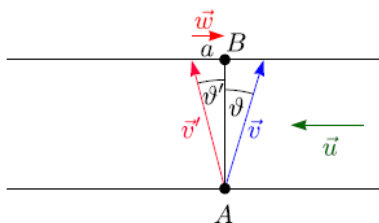
$$\tan \theta' = \frac{u}{v} \Rightarrow \theta' = \arctan \left(\frac{u}{v} \right)$$



- (c) Es sei θ der Winkel, in dem die Person rudern muss und θ' der Winkel, in dessen Richtung sich das Boot bewegt. Die zugehörigen Geschwindigkeiten seien $\vec{v}$ beziehungsweise $\vec{v}'$. Wir berechnen nun zuerst θ . t_1 sei die Zeit, die das Boot benötigt, um das andere Flussufer zu erreichen. Mit t_2 bezeichnen wir die Zeit,

die der Bootsführer benötigt, um am anderen Ufer zu Fuß den Punkt zu erreichen, dem der Startpunkt gegenüber liegt.

$$t_1 = \frac{b}{v_y} = \frac{b}{v \cos \theta}, \text{ und } t_2 = \frac{a}{w}.$$



a ist der Weg, den das Boot parallel zum Ufer in der Zeit t_1 - also bei Überquerung des Flusses - zurücklegt:

$$a = t_1 \cdot |v_x - u| = t_1 \cdot |v \sin \theta - u|.$$

Die Gesamtzeit T ergibt sich dann durch Addition von t_1 und t_2 :

$$T(\theta) = \frac{b}{v \cos \theta} + \frac{b}{vw \cos \theta} |v \sin \theta - u| = \frac{b}{v \cos \theta} \cdot \left(1 + \frac{|u - v \sin \theta|}{w}\right).$$

Der Punkt $u = v \sin \theta$ muss gesondert behandelt werden, da $T(\theta)$ dort nicht differenzierbar ist. Ansonsten finden wir das Minimum in Abhängigkeit des Winkels θ durch Ableiten von $T(\theta)$ nach θ und anschließendes Nullsetzen. Für $u \geq v \sin \theta$ gilt (Man kann nachprüfen, dass $\frac{dT}{d\theta} > 0$ für $u \leq v \sin \theta$. Es gibt dort also kein Minimum.):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\theta} &= \frac{b}{v \cos \theta} \cdot \left[\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \left(1 + \frac{u}{w} - \frac{v}{w} \sin \theta \right) - \frac{v}{w} \cos \theta \right] \Leftrightarrow \\ \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{u}{w} - \frac{v}{w} \sin \theta \right) &= \frac{v}{w} \cos^2 \theta = \frac{v}{w} (1 - \sin^2 \theta) \Leftrightarrow \\ \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{u}{w} \right) &= \frac{v}{w} \Leftrightarrow \\ \theta &= \arcsin \left(\frac{v}{w+u} \right).\end{aligned}$$

Die Zeit, die benötigt wird, ist:

$$T = b \frac{\sqrt{(u+w)^2 - v^2}}{vw}.$$

Wir müssen nun noch diese Zeit mit der für den speziellen Winkel $\theta = \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)$ vergleichen, bei der $T(\theta)$ nicht differenzierbar ist. Für diesen Winkel gilt

$$T' = \frac{b}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Dieser Fall entspricht der Situation $a = 0$, also wenn die Person nicht laufen muss. Das Boot bewegt sich in diesem Fall mit $\theta' = 0$, also senkrecht zum Ufer. Diese zweite Lösung gibt die minimale Zeit, wenn sie

kleiner ist als die erste Lösung. Es kann aber auch sein, dass die erste Lösung einen Winkel ergibt, für den $u \leq v \sin \theta$ gilt. Dies stimmt dann nicht mit der Annahme $u \geq v \sin \theta$ überein, die wir gemacht haben um die Lösung zu finden. Auch in diesem Fall ist die günstigste Lösung die, bei der die Person nicht laufen muss.

Für die gesamte Geschwindigkeit des Bootes gilt nun $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$, also in Komponenten $v'_x = v_x - u$ und $v'_y = v_y$. Nach Pythagoras erhalten wir dann für den Betrag von $\vec{v}'$:

$$v' = \sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2}.$$

Aus der Bedingung $v' \cos \theta' = v \cos \theta$ erhalten wir schließlich den Winkel θ' , in dessen Richtung sich das Boot im Fall der ersten Lösung bewegen muss:

$$\theta' = \arccos\left(\frac{v}{v'} \cos \theta\right).$$

Aufgabe 2: Elastischer Stoß

Das Schwerpunkt im Laborsystem ist gegeben durch $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ (weil die Teilchen die gleiche Masse haben). Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes im Anfangszustand ist gegeben durch $\dot{\vec{R}}_i = \frac{1}{2}(\vec{v}_{i1} + \vec{v}_{i2}) = \frac{1}{2}\vec{v}_{i1}$. Im Center of Mass Bezugssystem (auch Schwerpunktssystem genannt) ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich 0. Also $\dot{\vec{R}}'_i = 0 = \dot{\vec{R}}_i - \frac{1}{2}\vec{v}_{i1}$. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Laborsystem und die im Schwerpunktssystem $\vec{v}'$ findet man also durch die Transformation $\vec{v}' = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{v}_{i1}$.

(a) Die Anfangsgeschwindigkeiten im Schwerpunktssystem sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_{i1} &= \vec{v}_{i1} - \frac{1}{2}\vec{v}_{i1} = \frac{1}{2}\vec{v}_{i1}, \\ \vec{v}'_{i2} &= \vec{v}_{i2} - \frac{1}{2}\vec{v}_{i1} = -\frac{1}{2}\vec{v}_{i1}.\end{aligned}$$

Im Center of Mass System bewegen sich die beiden Teilchen aufeinander zu.

Da keine externe Kräfte auf das System einwirken, bleibt der Gesamtimpuls erhalten:

$$m\vec{v}'_{i1} + m\vec{v}'_{i2} = 0 = m\vec{v}'_{f1} + m\vec{v}'_{f2}.$$

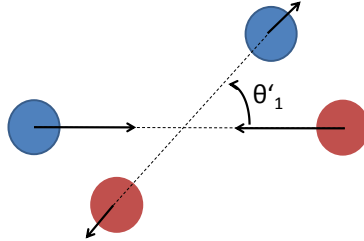
Daraus erhält man also $\vec{v}'_{f2} = -\vec{v}'_{f1}$. Aus der Energieerhaltung bekommt man:

$$\frac{1}{2}m(v'_{i1})^2 + \frac{1}{2}m(v'_{i2})^2 = \frac{1}{2}m(v'_{f1})^2 + \frac{1}{2}m(v'_{f2})^2,$$

und damit:

$$\frac{1}{4}v_{i1}^2 + \frac{1}{4}v_{i1}^2 = 2 \cdot (v'_{f1})^2 \Rightarrow v'_{f1} = \frac{1}{2}v_{i1}.$$

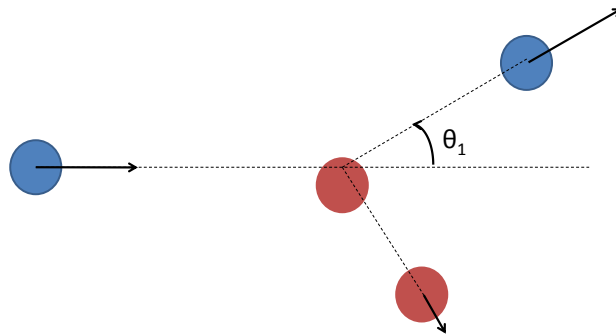
Im Endzustand fliegen die Teilchen also mit gleicher Geschwindigkeit auseinander.



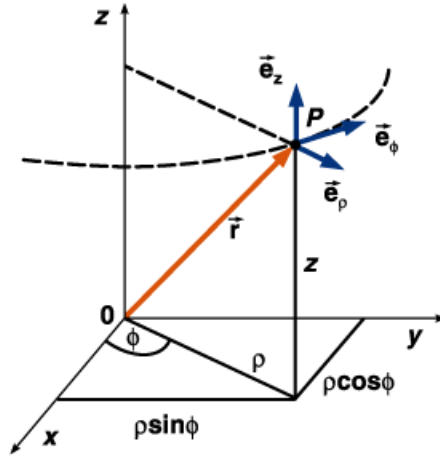
(b) Durch Rücktransformation der Geschwindigkeiten in das Laborsystem findet man

$$\begin{aligned}\vec{v}_{f1} &= \frac{1}{2}\vec{v}_{i1} + \vec{v}'_{f1}, \\ \vec{v}_{f2} &= \frac{1}{2}\vec{v}_{i1} + \vec{v}'_{f2} = \frac{1}{2}\vec{v}_{i1} - \vec{v}'_{f1}.\end{aligned}$$

Jetzt sieht man, dass $\vec{v}_{f1} \cdot \vec{v}_{f2} = \frac{1}{4}v_{i1}^2 - \left(v'_{f1}\right)^2 = \frac{1}{4}v_{i1}^2 - \frac{1}{4}v_{i1}^2 = 0$. Im Laborsystem stehen die Endgeschwindigkeiten senkrecht aufeinander, also $\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$.



Aufgabe 3: Zylinderkoordinaten



(a)

$$(b) \quad \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1, \quad \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1, \quad \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1 \\ \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi = 0, \quad \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = 0$$

(c) Unter Ausnutzung der Kettenregel der Differenzierung bekommt man:

$$\frac{d}{dt} \hat{e}_\rho = \frac{d}{dt} (\cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y) = (-\sin \phi \dot{\phi} \hat{e}_x + \cos \phi \dot{\phi} \hat{e}_y) = \dot{\phi} \hat{e}_\phi \\ \frac{d}{dt} \hat{e}_\phi = \frac{d}{dt} (-\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y) = (-\cos \phi \dot{\phi} \hat{e}_x - \sin \phi \dot{\phi} \hat{e}_y) = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho$$

(d) Da $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\phi$ beide in der x-y-Ebene liegen, hat $\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi$ nur eine Komponente in z-Richtung:

$$(\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi)_z = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1,$$

und damit $\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_z$.