12. Übung zur Vorlesung Theorie A — Wintersemester 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. G. Schön - Dr. G. Metalidis — http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Abgabetermin: Mittwoch, 03.02.2009 vor 13.00 Uhr.

Aufgabe 1: Beispiel einer Zentralkraft

Betrachten Sie zwei Punktmassen m_1 und m_2, verbunden durch eine Schnur (Länge l), die durch ein kleines Loch in einem Tisch reibungslos gleiten kann. m_1 bewegt sich auf dem Tisch, und wird durch die Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) mit $z = 0$ beschrieben, wobei der Ursprung am Loch im Tisch liegt und die z-Achse nach oben zeigt. m_2 hängt an der Schnur, auf einer Höhe $h = \rho - l$ relativ zur Tischplatte. Wir nehmen an, dass die Schnur stets gespannt bleibt. Wir werden ρ und ϕ als unabhängige Variablen benutzen.

(a) Was ist die Grösse L des Drehimpulses $\vec{L} = L\hat{e}_z$? Zeigen Sie, dass die auf die Masse m_1 wirkende Kraft eine Zentralkraft ist. Benutzen Sie dann die Drehimpulserhaltung, um $\dot{\phi}$ als Funktion von ρ (und L) auszudrücken. (2 Punkte)

(b) Was ist die Gesamtenergie $E = T + V$ (als Funktion von ρ, $\dot{\rho}$, und $\dot{\phi}$), wenn der Nullpunkt der potentiellen Energie bei $\rho = l$ gewählt wird?
Hinweis: T hat einen Beitrag von der hängenden Masse, sowie einen radialen und Winkelbeitrag von der kreisenden Masse. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Energie aus b) in die Form

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho), \text{ wobei } \quad V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m_1\rho^2} + m_2 g(\rho - l)$$

gebracht werden kann. Zeichnen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\rho)$. Bestimmen Sie den Radius $\bar{\rho}_0$, an dem das Minimum von V_{eff} liegt. (2 Punkte)

(d) Beschreiben Sie qualitativ die Bewegung des Systems, mit Anfangsbedingungen $\rho_0 \neq 0$, $\dot{\phi}_0 \neq 0$, und $\dot{\rho}_0 = 0$ anhand der Skizze von $V_{\text{eff}}(\rho)$. Nehmen Sie an, das $V_{\text{eff}}(\rho) < E < 0$. (1 Punkt)

(e) Ist es für $\dot{\phi}_0 \neq 0$ und $\rho_0 \neq 0$ möglich, dass das hängende Teilchen das kreisende durchs Loch hinunterzieht? (1 Punkt)

(f) Was ist, für gegebenen Anfangsradius ρ_0 und $\dot{\rho}_0 = 0$, die kleinste Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\phi}_{0,\text{min}}$ der kreisende Masse, für die das hängende Teilchen (durch die Zentrifugalkraft des kreisenden) bis auf den Tisch heraufgezogen wird? (1 Punkt)

Aufgabe 2: Polarkoordinaten

Analog zu den im letzten Aufgabenblatt besprochene Zylinderkoordinaten, wollen wir hier die Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten) einführen. Die Beziehung zwischen Kartesischen und Polarkoordinaten ist wie folgt definiert:

$$(x, y, z) = (r \cos\phi \sin\theta,\ r \sin\phi \sin\theta,\ r \cos\theta).$$

Die Einheitsvektoren der Polarkoordinaten sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \cos\phi \sin\theta \hat{e}_x + \sin\phi \sin\theta \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z, \\
\hat{e}_\phi &= -\sin\phi \hat{e}_x + \cos\phi \hat{e}_y, \\
\hat{e}_\theta &= \cos\phi \cos\theta \hat{e}_x + \sin\phi \cos\theta \hat{e}_y - \sin\theta \hat{e}_z.
\end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_\theta$ und $\hat{e}_r$ für $\phi = 0$ in der x-z-Ebene, sowie $\hat{e}_\phi$ und $\hat{e}_r$ für $\theta = \frac{\pi}{2}$ in der x-y-Ebene. (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie die zeitlichen Ableitung $\dot{\hat{e}}_r$. (1 Punkt)

(c) Finden Sie zunächst $\dot{\vec{r}}$ (wobei $\vec{r} = r\hat{e}_r$) und zeigen Sie, dass $\vec{L} = mr^2 \left(\dot{\theta}\hat{e}_\phi - \sin\theta\dot{\phi}\hat{e}_\theta\right)$. Verwenden Sie dazu, dass $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ ein orthonormales Rechtssytem bildet (d.h. dass die Einheitsvektoren orthogonal und normiert sind, und dass gilt $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi$, $\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_r$, und $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$). (1 Punkt)