

Aufgabe 1: Beispiel einer Zentralkraft

- (a) Die Gravitationskraft auf die Masse m_2 ist gegeben durch $\vec{F}_2 = -m_2 g \hat{e}_z$. Diese Kraft wird durch die Schnur direkt an das erste Teilchen weitergegeben, hat jetzt aber die Richtung $-\hat{e}_\rho$. Da die Gravitationskraft auf m_1 durch eine entgegengestetzte Kraft, die der Tisch auf das Teilchen ausübt, aufgehoben wird, ist die Kraft die auf Teilchen 2 wirkt gegeben durch $\vec{F}_1 = -m_2 g \hat{e}_\rho$.
Der Drehimpuls für das erste Teilchen (masse m_1) ist gegeben durch:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \rho \hat{e}_\rho \times m_1 (\dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi) = m_1 \rho^2 \dot{\phi} \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi = m_1 \rho^2 \dot{\phi} \hat{e}_z,$$

wobei wir den Impuls $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ in Zylinderkoordinaten ausgedrückt haben ($\vec{v}_1 = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi$). Da die Kraft auf das erste Teilchen eine Zentralkraft ist, bleibt der Drehimpuls erhalten, und es gilt:

$$L = m_1 \rho^2 \dot{\phi} = \text{const} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{m_1 \rho^2}.$$

Der Drehimpuls für das zweite Teilchen $\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = 0$, weil $\vec{r}_2$ und $\vec{p}_2$ immer senkrecht aufeinander stehen.

- (b) Den kinetischen Anteil finden wir aus:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}^2 + 2 \dot{\rho} \rho \dot{\phi} \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\rho}^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\rho}^2,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\vec{r}_2 = h \hat{e}_z = (\rho - l) \hat{e}_z$ und damit $\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\rho} \hat{e}_z$. Nur die unter dem Tisch hängende Masse m_2 liefert einen Anteil zur potentiellen Energie, da wir das Nullniveau nach $\rho = l$, also $z = 0$ legen:

$$V = m_2 g (\rho - l).$$

Damit ergibt sich für die Gesamtenergie $E = T + V$:

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{m_1}{2} \rho^2 \dot{\phi}^2 + m_2 g (\rho - l).$$

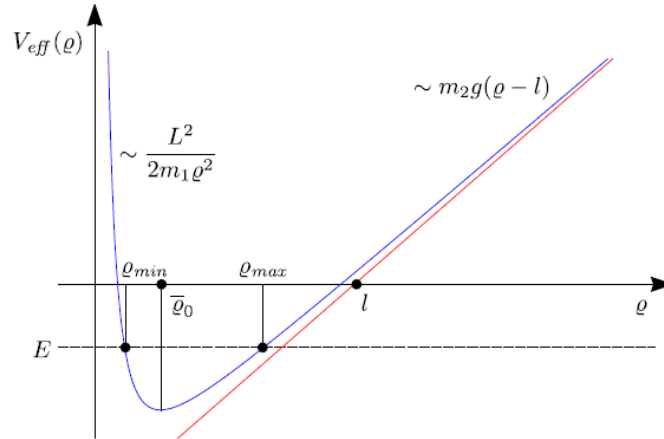
- (c) Wir schreiben die Gesamtenergie E in folgender Form:

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho),$$

wobei

$$V_{\text{eff}}(\rho) = m_2 g (\rho - l) + \frac{m_1}{2} \rho^2 \cdot \left(\frac{L}{m_1 \rho^2} \right)^2 = \frac{L^2}{2 m_1 \rho^2} + m_2 g (\rho - l).$$

Nun skizzieren wir das effektive Potential:



Das Maximum $\bar{\rho}_0$ erhalten wir durch Differenzieren nach ρ und anschließendem Nullsetzen:

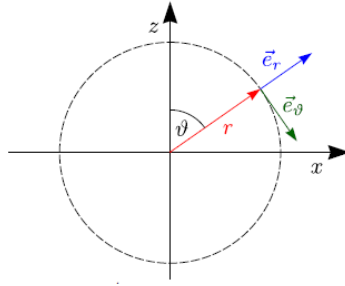
$$\frac{d}{d\rho} V_{\text{eff}}(\bar{\rho}_0) = 0 \Rightarrow -\frac{2L^2}{2m_1\bar{\rho}_0^3} + m_2g = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_0 = \left(\frac{L^2}{m_1 m_2 g} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

- (d) In diesem Fall oszilliert ρ zwischen den beiden Randwerten $\rho_{\min}$ und $\rho_{\max}$ (siehe Abbildung), die man aus der Bedingung $V_{\text{eff}}(\rho) = E$ herleiten kann. Physikalisch sieht es folgendermaßen aus: Teilchen 1 kreist herum, und es entsteht eine Zentrifugalkraft die das Teilchen nach aussen zieht. Die Gravitationskraft auf das zweite Teilchen wirkt dieser Zentrifugalkraft entgegen. Ist die Gravitationskraft größer, so bewegt sich das erste Teilchen zum Ursprung hin (ρ wird kleiner). Da der Drehimpuls $L = m_1 \rho^2 \dot{\phi}$ eine Erhaltungsgröße ist, muss sich die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ erhöhen. Dadurch wird die Zentrifugalkraft größer und größer. Ab einem bestimmten Zeitpunkt übersteigt die Zentrifugalkraft die Gravitationskraft und das erste Teilchen fängt an sich nach außen zu bewegen (ρ nimmt zu). Dadurch wird die Winkelgeschwindigkeit (und damit die Zentrifugalkraft) kleiner, bis die Zentrifugalkraft wieder kleiner ist als die Gravitationskraft und das ganze wieder von vorne anfängt.
- (e) Da $V_{\text{eff}}(\rho) \rightarrow \infty$ für $\rho \rightarrow 0$, ist es unmöglich den Zustand $\rho = 0$ zu erreichen. Dies ist nur möglich, falls L und damit $\dot{\phi}$ gleich Null ist.
- (f) Wollen wir den Zustand $\rho = l$ erreichen, so muss $E = V_{\text{eff}}(l) = \frac{L^2}{2m_1 l^2} = \frac{(m_1 \rho_0^2 \dot{\phi}_0)^2}{2m_1 l^2} = \frac{m_1 \rho_0^4 \dot{\phi}_0^2}{2l^2}$ sein. Also $\dot{\phi}_0 \geq \sqrt{\frac{2l^2 E}{m_1 \rho_0^4}}$.

Aufgabe 2: Polarkoordinaten

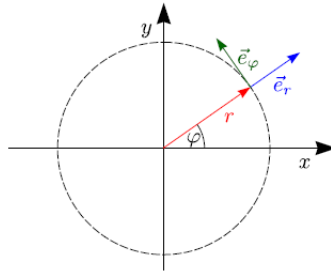
- (a) Für $\phi = 0$ gilt:

$$\hat{e}_\theta = \hat{e}_x \cos \theta - \hat{e}_z \sin \theta \text{ und } \hat{e}_r = \hat{e}_x \sin \theta + \hat{e}_z \cos \theta.$$



Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\hat{e}_\phi = -\hat{e}_x \sin \phi + \hat{e}_y \cos \phi \text{ und } \hat{e}_r = \hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi.$$



(b) $\dot{\hat{e}}_r = \left(-\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta \right) \hat{e}_x + \left(\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \right) \hat{e}_y - \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_z = \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + \dot{\theta} \hat{e}_\theta.$

(c) $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r = r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \hat{e}_r.$ Aus $\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ folgt

$$\vec{L} = m r \hat{e}_r \times \left(r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \hat{e}_r \right) = m r^2 \left(-\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\theta + \dot{\theta} \hat{e}_\phi \right).$$