13. Übung zur Vorlesung Theorie A	Wintersemester 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie	
Prof. G. Schön - Dr. G. Metalidis	http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Abgabetermin: Mittwoch, 10.02.2009 vor 13.00 Uhr.

Aufgabe 1: Zentralkraft

Wir betrachten zwei Teilchen mit Zentralkraft $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\mu\omega_0^2\vec{r}$, wobei $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Es wirken keine externen Kräfte. Wir wissen daher (siehe Vorlesung), dass der Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rel}}$ der Relativbewegung erhalten ist und wählen die z-Achse entlang des Drehimpulses. Auch die relative Energie $E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r)$, mit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ ist für dieses System erhalten.

(a) Berechnen Sie das Potenzial $U(r)$, das zu dieser Wechselwirkungskraft gehört. (1 Punkt)

(b) Reduzieren Sie das Problem auf ein eindimensionales für $r = |\vec{r}|$ mit effektivem Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$. Skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(r)$. Für welchen Abstand r_0 ist das Potential minimal? Was ist der Wert von $U_{\text{eff}}(r_0)$? (3 Punkte)

(c) Diskutieren Sie anhand ihrer Skizze die Bewegung qualitativ. Für welche Energie gibt es (un)gebundene Bahnen? (1 Punkt)

(d) Nutzen Sie die Energieerhaltung, um eine Gleichung für $\dot{r}$ herzuleiten. Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Separation der Variablen. Verwenden Sie dazu folgende Anfangsbedingung: $r(t = t_0) = r_0 = \sqrt{\frac{E}{\mu\omega_0^2}}$.
Hinweis: Durch eine Substitution $u = r^2$, kann man das auftretende Integral in die Form $\int_{r_0^2}^{r^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{au^2+bu+c}}$ bringen. Die Stammfunktion dieser Funktion ist gegeben durch: $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{au^2+bu+c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2au+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$ (für $a < 0$ und $b^2 - 4ac > 0$). (3 Punkte)

(e) Bonusaufgabe: Nutzen Sie Drehimpulserhaltung um eine Gleichung für $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}$ herzuleiten. Integrieren Sie diese (nach Separation der Variablen), und finden Sie r als Funktion von ϕ. (3 Bonuspunkte)
Hinweis: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin\left[\frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}}\right]$, für $c < 0$ und $b^2 - 4ac > 0$.

Aufgabe 2: Ellipsengleichungen

Eine Ellipse kann konstruiert werden, indem man einen Faden der Länge L an den beiden Orten $x = \pm h < \frac{L}{2}$, $y = 0$ eines x-y-Koordinatensystems befestigt, und dann mittels eines Stiftes den Faden spannt. Bewegt man den Stift auf einer Kurve so, dass der Faden gespannt bleibt, erhält man eine Ellipse (siehe Bonusaufgabe d).
Die Punkte $x = \pm h$ an denen der Faden befestigt ist, heißen Brennpunkte der Ellipse.
Die Gleichung der Ellipse ist gegeben durch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(a) Geben Sie eine Interpretation der Größen a und b. (1 Punkt)

(b) Bonusaufgabe: Zeigen Sie, dass $h^2 = a^2 - b^2$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Positionen $(x, y) = (0, b)$ und $(x, y) = (a, 0)$ des Stiftes. (1 Bonuspunkt)

(c) Wir betrachten jetzt ein neues Koordinatensystem (x', y') mit Ursprung im rechten Brennpunkt. Zeigen Sie, dass dann in Polarkoordinaten r und ϕ (mit $x' = r\cos\phi$ und $y' = r\sin\phi$) die folgende Gleichung für die Ellipse gilt:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}.$$

Bestimmen Sie p und ϵ als Funktion von a und b. (3 Punkte)
Hinweis: Finden Sie zuerst den Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten des alten und neuen Systems. Gehen Sie dann über zu Polarkoordinaten. Setzen Sie diese in die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ein.

(d) Bonusaufgabe: Zeigen Sie, dass die Fadenkonstruktion auch wirklich eine Ellipse ergibt. (5 Bonuspunkte)
Hinweis: Berechnen Sie r^2 und s^2 als Funktion von h, x, und y, und verwenden Sie $r + s = L$.