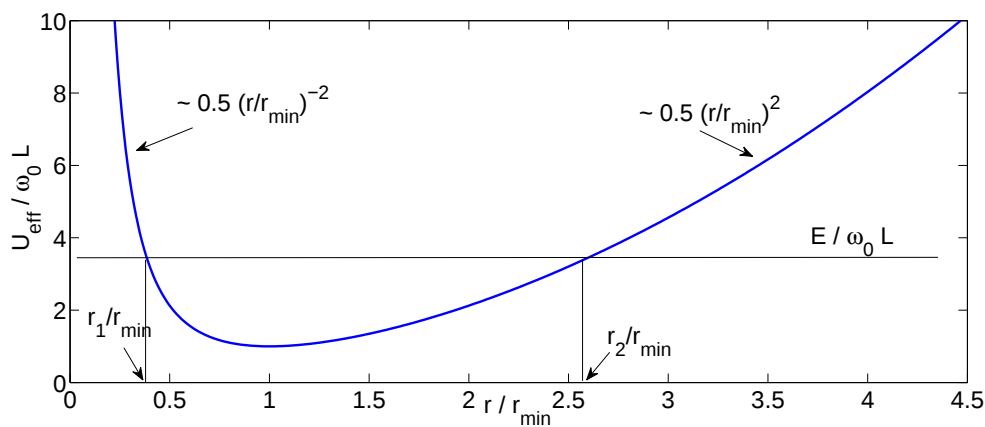


Aufgabe 1: Zentralkraft

- (a) Das Potenzial $U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 r^2$, ergibt die Kraft $\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_1 U = -\frac{1}{2}\mu\omega_0^2 \vec{\nabla}_1 ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) = -\mu\omega_0^2 ((x_1 - x_2)\hat{e}_x + (y_1 - y_2)\hat{e}_y) = -\mu\omega_0^2 \vec{r}$. Wir haben hier die Drehimpulserhaltung schon verwendet und angenommen, dass die Teilchen sich in der x-y-Ebene bewegen ($z_1 = z_2 = 0$).
- (b) Wir schreiben $\vec{r} = r\hat{e}_\rho$ in Zylinderkoordinaten. Für die Geschwindigkeit finden wir dann $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_\rho + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$ (mit $\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\phi}\hat{e}_\phi$, siehe Übungsblatt 11). Damit ergibt sich: $(\dot{\vec{r}})^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$, wobei wir den erhaltenen Drehimpuls $L = \mu r^2 \dot{\phi}$ eingesetzt haben. Wir finden für die relative Energie:

$$E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad \text{mit } U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 r^2.$$

Das Minimum dieses Potenzials ergibt sich aus $\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0 \Leftrightarrow -\frac{L}{\mu r_{\text{min}}^3} + \mu\omega_0^2 r_{\text{min}} = 0 \Leftrightarrow r_{\text{min}}^2 = \frac{L}{\mu\omega_0}$, und damit $U_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = \omega_0 L$.



- (c) Es gibt nur gebundene Bahnen. Der Abstand r zwischen den beiden Teilchen oszilliert zwischen den Werten r_1 und r_2 , die durch die relative Energie bestimmt werden (siehe Abbildung). Die zwei Teilchen stoßen nicht aufeinander, solange $L \neq 0$ gilt.
- (d) Aus den Ausdrücken für die relative Energie folgt:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E_{\text{rel}} - U - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)} \Leftrightarrow dt = \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E_{\text{rel}} r^2 - U r^2 - \frac{L^2}{2\mu} \right)}}.$$

Integration dieser Gleichung ergibt:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E_{\text{rel}} r^2 - \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 r^4 - \frac{L^2}{2\mu} \right)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0^2}^{r^2} \frac{du}{\sqrt{-\frac{1}{2} \mu \omega_0^2 u^2 + Eu - \frac{L^2}{2\mu}}}.$$

Nach einsetzen der angegebenen Stammfunktion finden wir:

$$t - t_0 = -\frac{1}{2\omega_0} \left[\arcsin \left(\frac{E - \mu \omega_0^2 r^2}{\sqrt{E^2 - \omega_0^2 L^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{E - \mu \omega_0^2 r_0^2}{\sqrt{E^2 - \omega_0^2 L^2}} \right) \right].$$

Mit der Randbedingung $r_0^2 = \frac{E}{\mu \omega_0^2}$ ist der letzte arcsin gleich Null, und wir bekommen:

$$-2\omega_0 (t - t_0) = \arcsin \left(\frac{E - \mu \omega_0^2 r^2}{\sqrt{E^2 - \omega_0^2 L^2}} \right) \Leftrightarrow r(t) = \sqrt{\frac{E}{\mu \omega_0^2} + \frac{\sqrt{E^2 - \omega_0^2 L^2}}{\mu \omega_0^2} \cdot \sin(2\omega_0 (t - t_0))}.$$

(e) Wir verwenden $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dr} \cdot \dot{r}$ und $L = \mu r^2 \dot{\phi}$ und finden damit:

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\mu r^2 \dot{r}}{L} = \frac{\mu}{L} \cdot r^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E_{\text{rel}} - \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 r^2 - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)} \right) = \frac{\sqrt{2\mu}}{L} \cdot r \cdot \sqrt{E_{\text{rel}} r^2 - \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 r^4 - \frac{L^2}{2\mu}}.$$

Separation der Variablen liefert:

$$d\phi = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \frac{dr}{r \sqrt{Er^2 - \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 r^4 - \frac{L^2}{2\mu}}}.$$

Integration und Substitution $u = r^2$ liefert:

$$\phi - \phi_0 = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \frac{1}{2} \int_{r_0^2}^{r^2} \frac{du}{u \sqrt{-\frac{1}{2} \mu \omega_0^2 u^2 + Eu - \frac{L^2}{2\mu}}}.$$

Nach einsetzen der Stammfunktion bekommt man:

$$\phi - \phi_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{r^2 - L^2/(E\mu)}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}}} \right) - \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{r_0^2 - L^2/(E\mu)}{r_0^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{r^2 - L^2/(E\mu)}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}}} \right) - \frac{1}{2} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}} \right)$$

Da der zweite arcsin nicht von r abhängig ist, können wir den Term in die Phase ϕ_0 absorbieren. Wir bekommen dann:

$$\phi - \phi'_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{r^2 - L^2/(E\mu)}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}}} \right),$$

wobei wir $\phi'_0 = \phi_0 - \frac{1}{2} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}} \right)$ definiert haben, und die Anfangsbedingung $r_0 = \sqrt{\frac{E}{\mu \omega_0^2}}$ verwendet haben. Daraus bekommt man jetzt

$$r(\phi) = r_0 \frac{\omega_0 L}{E} \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L^2}{E^2}} \sin(2(\phi - \phi'_0))}}.$$

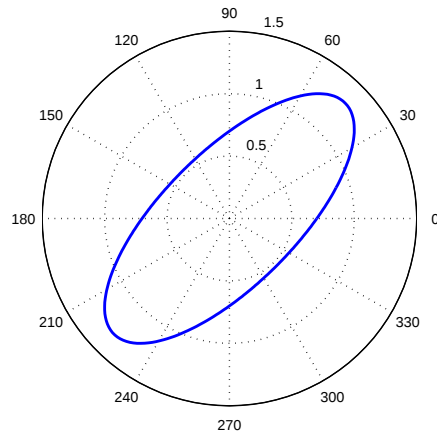
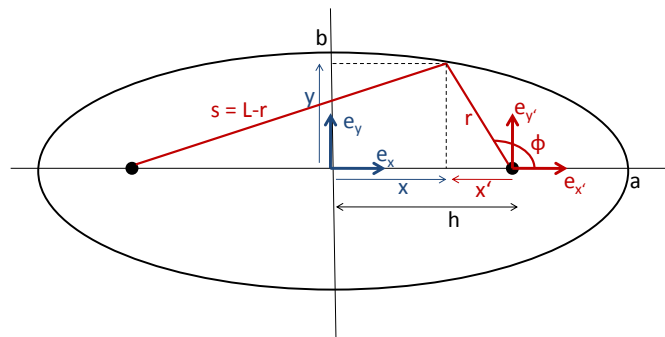


Figure 1: Der Bahn $r(\phi)/r_0$ für $\omega_0 L/E = 0.7$ und $\phi'_0 = 0.0$

Aufgabe 2: Ellipsengleichungen

(a) Siehe Abbildung.



- (b) Mit dem Stift auf Position $(x = 0, y = b)$ gilt: $s^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 = h^2 + b^2$. Mit dem Stift auf Position $(x = a, y = 0)$ gilt: $L = h + a + (a - h) = 2a$. Durch Eliminieren von h aus diesen beiden Gleichungen, erhalten wir $h^2 = a^2 - b^2$.

(c) Es gilt: $x' = r \cos \phi = x - h$ und $y' = r \sin \phi = y$. Also:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi + h, \\y &= r \sin \phi.\end{aligned}$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Ellipsengleichung ein, und bekommen:

$$\begin{aligned}\frac{(r \cos \phi + h)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \phi)^2}{b^2} &= 1 \Leftrightarrow \\ \frac{r^2 \cos^2 \phi + 2rh \cos \phi + h^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \phi}{b^2} &= 1 \Leftrightarrow \\ r^2 b^2 \cos^2 \phi + 2rh b^2 \cos \phi + h^2 b^2 + r^2 a^2 \sin^2 \phi &= a^2 b^2\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $b^2 = a^2 - h^2$ in den ersten Term ein:

$$\begin{aligned}r^2 a^2 \cos^2 \phi - r^2 h^2 \cos^2 \phi + 2rh b^2 \cos \phi + h^2 b^2 + r^2 a^2 \sin^2 \phi &= a^2 b^2 \Leftrightarrow \\ r^2 a^2 - r^2 h^2 \cos^2 \phi + 2rh b^2 \cos \phi + h^2 b^2 &= a^2 b^2\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir: $(rh \cos \phi - b^2)^2 = r^2 h^2 \cos^2 \phi + 2rh b^2 \cos \phi - b^4$. Damit erhalten wir:

$$r^2 a^2 - (rh \cos \phi - b^2)^2 + b^4 + h^2 b^2 = a^2 b^2$$

Nun setzen wir wieder $h^2 = a^2 - b^2$ ein, und bekommen:

$$\begin{aligned}r^2 a^2 - (rh \cos \phi - b^2)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ ra &= |rh \cos \phi - b^2| \stackrel{*}{=} b^2 - rh \cos \phi \Leftrightarrow \\ r(\phi) &= \frac{b^2}{a + h \cos \phi} = \frac{b^2/a}{1 + \frac{h}{a} \cos \phi}.\end{aligned}$$

Damit ist $p = b^2/a$ und $\epsilon = h/a$.

(*)Hinweis:

$$\begin{aligned}rh \cos \phi - b^2 &< 0 \Leftrightarrow \\ rh \cos \phi + h^2 - a^2 &< 0 \Leftrightarrow \\ h(r \cos \phi + h) - a^2 &< 0 \Leftrightarrow \\ \frac{h}{a} \left(\frac{r \cos \phi + h}{a} \right) &< 1 \Leftrightarrow \\ \frac{h}{a} \frac{x}{a} &< 1\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichheit gilt, weil $h < a$ und $x < a$.

(d) Man sieht, dass

$$\begin{aligned}r^2 &= y^2 + (h - x)^2 \Rightarrow r = \sqrt{y^2 + (h - x)^2}, \text{ und} \\ s^2 &= y^2 + (h + x)^2.\end{aligned}$$

Da $r + s = L$, finden wir aus der letzten Beziehung: $(L - r)^2 = y^2 + (h + x)^2$. Nach Einsetzen der Gleichung für r , bekommt man:

$$\begin{aligned} \left(L - \sqrt{y^2 + (h - x)^2}\right)^2 &= y^2 + (h + x)^2 \Leftrightarrow \\ L^2 + y^2 + (h - x)^2 - 2L\sqrt{y^2 + (h - x)^2} &= y^2 + h^2 + 2hx + x^2 \Leftrightarrow \\ L^2 - 2hx - 2L\sqrt{y^2 + (h - x)^2} &= 2hx \Leftrightarrow \\ 2L\sqrt{y^2 + (h - x)^2} &= L^2 - 4hx \end{aligned}$$

Quadrieren dieser Gleichung, und Einsetzen von $L = 2a$ (siehe Teilaufgabe b) und $h^2 = a^2 - b^2$ liefert das Ergebnis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.