Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/

WS 10/11 – Blatt 02
Abgabe: 26.10.2010
Besprechung: 29.10.2010

(*) Aufgabe 4 (10P): Integration

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{ac - b^2}{2a^{3/2}}\,\mathrm{arsinh}\frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} + \frac{ax + b}{2a}\sqrt{ax^2 + 2bx + c}\,,$$

falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$. Möglicher Lösungsweg:

(a) Finden Sie eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so dass

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 + y_0^2)\,.$$

Hierbei sind die Konstanten x_0 und y_0 zu bestimmen.

(b) Das resultierende Integral läßt sich mit Hilfe der Substitution $y = y_0 \sinh\varphi$ auf das Integral, das in Aufgabe 1(c) von Blatt 1 berechnet wurde, zurückführen.

(c) Durch Einsetzen von $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$ erhält man die gewünschte Lösung.

(*) Aufgabe 5 (10P): Teilchen im Magnetfeld

Ein elektrisch geladenes Teilchen bewegt sich in einem räumlich und zeitlich konstanten Magnetfeld. Unter dem Einfluß der Lorentz-Kraft beschreibt das Teilchen eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$, welche durch folgende Parameterdarstellung gegeben ist:

$$\vec{r}(t) = (x(t)\,, y(t)\,, z(t))^{\mathrm{T}} = \left(R\cos(\omega t)\,, R\sin(\omega t)\,, h\,\frac{\omega t}{2\pi}\right)^{\mathrm{T}}\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

(b) Geben Sie die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren an, d.h. bestimmen Sie

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r}(t) \qquad \text{und} \qquad \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{r}(t)\,.$$

Beachten Sie dabei, dass die Zeitableitungen des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ komponentenweise zu nehmen sind:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,\vec{r}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}\,, \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}\,, \frac{\mathrm{d}^n z(t)}{\mathrm{d}t^n}\right)^{\mathrm{T}}\,.$$

(c) Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

Bitte wenden.

(d) Berechnen Sie die zwischen $t_0 = 0$ und einem beliebigem t zurückgelegte Wegstrecke $l(t)$:

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \left| \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right| = \int_{t_0}^{t} dt' \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right)^2} .$$

(e) Betrachten Sie nun den speziellen Fall der Bewegung auf einer Kreisbahn, d.h. $h = 0$. Wieviel Zeit braucht das Teilchen für einen kompletten Umlauf?

Aufgabe 6: Bahnkurven

Ein Massenpunkt bewegt sich auf folgenden Bahnkurven:

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & x(t) = vt\cos\theta\,, & y(t) = 0\,, & z(t) = vt\sin\theta - \frac{g}{2}t^2\,, \\
\text{(ii)} & x(t) = vt\,, & y(t) = y_0 \ln\left(\frac{vt}{y_0} + 1\right)\,, & z(t) = 0\,, \\
\text{(iii)} & x(t) = vt\sin\omega t\,, & y(t) = vt\cos\omega t\,, & z(t) = 0\,.
\end{array}$$

Die Parameter v, θ, g, y_0 und ω können als konstant (d.h. zeitunabhängig) betrachtet werden.

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurven.

(b) Berechnen Sie die zwischen $t_0 = 0$ und einem beliebigem t zurückgelegten Wegstrecken $l(t)$.