Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/

WS 10/11 – Blatt 03
Abgabe: 02.11.2010
Besprechung: 05.11.2010

(*) Aufgabe 7 (8P): Skalar- und Vektorprodukt

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

(a) Zeigen Sie, unter Verwendung von $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, dass die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ durch $\vec{a} \cdot (\vec{b}/|\vec{b}|)$ gegeben ist.

(b) Beweisen Sie, dass $|\vec{a} \times \vec{b}|$ die Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms angibt.

(c) Zeigen Sie, dass der Absolutbetrag von $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ gleich dem Volumen des durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds ist.

(d) Beweisen Sie,

(i) $$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \, ,$$

(ii) $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \, ,$$

(iii) $$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \, .$$

(e) Wie groß ist das Volumen eines Parallelepipeds, dessen Kanten durch $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$ und $\vec{c} = (3, -1, -2)$ gegeben sind?

(*) Aufgabe 8 (12P): Bahnkurven

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = Re^{a\omega t}(\cos\omega t \, , \sin\omega t)^{\mathrm{T}}$$

mit konstanten Parametern R, a und ω.

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und deren Betrag.

(c) Bestimmen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$ und deren Betrag. Gilt $|\vec{a}(t)| = \mathrm{d}|\vec{v}(t)|/\mathrm{d}t$?

(d) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ als Funktion der Zeit t für $t_0 = 0$.

(e) Parametrisieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ nach der Bogenlänge um, d.h. bestimmen Sie $\vec{r}(s)$.

(f) Berechnen Sie den Tangentenvektor $\vec{\tau}(s) = \mathrm{d}\vec{r}(s)/\mathrm{d}s$ und überzeugen Sie sich durch explizite Rechnung, dass $\vec{\tau}^{\,2} = 1$ gilt.

(g) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungsradius $\rho(s)$ der Bahnkurve.

(h) Berechnen Sie die Tangential- und Zentripetalbeschleunigung, sowie deren Beträge.

Bitte wenden.

Aufgabe 9: Konstante und exponentielle Beschleunigung

(a) Ein Klotz bewege sich reibungsfrei auf einer schiefen Ebene die gegenüber der Horizontalen um den Winkel θ geneigt ist. Aufgrund der Schwerkraft ist die Beschleunigung des Massenpunktes entlang der schiefen Ebene gegeben durch

$$\ddot{s}(t) = g \sin\theta \quad (g > 0)\,.$$

Bestimmen Sie daraus die Wegstrecke $s(t)$, die der Klotz nach der Zeit t auf der schiefen Ebene zurückgelegt hat. Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ seien gegeben durch $\dot{s}(0) = s(0) = 0$.

(b) Ein Massenpunkt bewege sich entlang der positiven x-Achse mit der Beschleunigung

$$\ddot{x}(t) = a e^{-bt} \quad (a, b > 0)\,.$$

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und den Ort des Massenpunktes als Funktion der Zeit t für die Anfangswerte $\dot{x}(0) = x(0) = 0$. Was erhalten Sie für sehr kleine t?

Elektronische Anmeldung in QISPOS
Sie können sich auf der Wepseite

`http://www.zvw.uni-karlsruhe.de/7552.php`

(über das Studierendenportal) zu den Vorleistungen anmelden.

Einteilung der Tutorien
Die aktualisierte Einteilung der Tutorien finden Sie auf der Webseite

`http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/`

Bitte vermerken Sie stets Ihre Gruppennummer und Ihren Namen deutlich auf dem Lösungsblatt.