Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/

WS 10/11 – Blatt 04
Abgabe: 09.11.2010
Besprechung: 12.11.2010

(*) Aufgabe 10 (14P): Schiefer Wurf

Ein Massenpunkt wird unter dem Winkel θ zur Horizontalen hochgeworfen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde er sich am Ort $\vec{r}(0) = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = v_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)^{\mathrm{T}}$. Infolge des Luftwiderstandes ist die Beschleunigung gegeben durch

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -k\vec{v}(t) - g\vec{e}_z\,, \qquad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)\,, \qquad k\,,g > 0 \tag{$*$}$$

Dabei bezeichnet $\vec{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung, welcher senkrecht auf der Erdoberfläche steht und nach oben zeigt. Durch Integration (analog zu Aufgabe 9 von Blatt 3) erhält man aus Gleichung $(*)$ die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und den Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Die jeweiligen Integrationskonstanten sind durch die Vorgabe von $\vec{v}(0)$ und $\vec{r}(0)$ festgelegt.

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Massenpunktes als Funktion der Zeit.
Hinweis: Führen Sie in Gleichung $(*)$ die Substitution $\vec{v}(t) = \vec{\phi}(t)e^{-kt}$ durch und bestimmen Sie zunächst die Funktion $\vec{\phi}(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes und skizzieren Sie diese.

(c) Zeigen Sie, dass der Massenpunkt im Limes $t \to \infty$ eine endliche Grenzgeschwindigkeit erreicht und berechnen Sie deren Betrag.

Zeigen Sie, dass gilt:

(d) Der höchste Bahnpunkt wird nach der Zeit

$$T = \frac{1}{k}\,\ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)$$

erreicht.

(e) Die Höhe am Scheitelpunkt der Bahn ist

$$H = \frac{v_0 \sin\theta}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)\,.$$

(f) Für kleinen Luftwiderstand $(k \to 0)$ sind die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ annähernd gegeben durch

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - g\,t\,\vec{e}_z\,, \quad \vec{r}(t) = t\,\vec{v}_0 - \frac{gt^2}{2}\vec{e}_z\,.$$

Hinweis: Für hinreichend kleines k gilt $e^{-kt} \approx 1 - kt + (k^2t^2)/2\,.$

Bitte wenden.

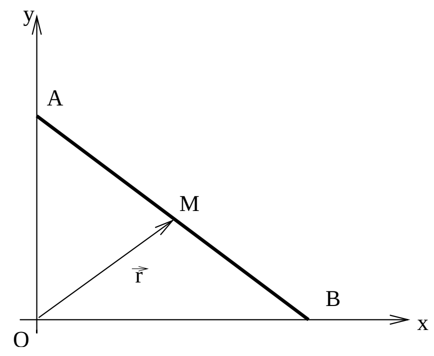
(*) Aufgabe 11 (6P): Leiter

Eine Leiter AB mit der Länge l ruht gegen eine senkrechte Wand OA (vgl. Abbildung). Der Fußpunkt B der Leiter wird mit konstanter Geschwindigkeit v_0 in positive x-Richtung gestoßen.

(a) Zeigen Sie, dass dabei der Mittelpunkt M der Leiter eine Kreisbahn vom Radius $l/2$ mit dem Ursprung in O durchläuft.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Leitermittelpunktes, solange der Abstand zwischen Wand und Fußpunkt B kleiner l ist, d.h. für $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| < l$.

(c) (*freiwillig*) Bestimmen Sie die Beschleunigung des Leitermittelpunktes.



(d) (*freiwillig*) Berechnen Sie die Tangential- und Zentripetalbeschleunigung des Leitermittelpunktes.