Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/

WS 10/11 – Blatt 05
Abgabe: 16.11.2010
Besprechung: 19.11.2010

(*) Aufgabe 12 (8P): Reziproke Vektoren

Gegeben sind drei nicht in einer Ebene liegende Vektoren $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Mittels $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_k = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ werden sogenannte reziproke Vektoren $\vec{b}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ definiert. Hierbei bezeichne δ_{ik} das Kronecker Symbol: $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$ und $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$.

(a) Bestimmen Sie die reziproken Vektoren $\vec{b}_k$ in Abhängigkeit von den Vektoren $\vec{a}_i$.

(b) Verifizieren Sie: $\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = [\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)]^{-1}$.

(c) Lösen Sie die Gleichungen $\vec{a}_i \cdot \vec{r} = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$, wobei c_i Konstanten sind, mit Hilfe der reziproken Vektoren nach dem Ortsvektor $\vec{r}$ auf.

(d) Gegeben seien drei orthonormale Basisvektoren $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Bestimmen Sie die hierzu reziproken Vektoren.

(*) Aufgabe 13 (12P): Wassertropfen

Ein kugelförmiger Wassertropfen (Radius R, Masse m) falle im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten. Dabei gewinnt er während des Fallens durch Kondensation von Wasserdampf in der Atmosphäre an Masse mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu seiner Oberfläche ist. Die Dichte ρ des Wassers bleibe dabei konstant.

(a) Zeigen Sie, dass der Radius $R(t)$ des Wassertropfens für $R(0) = R_0$ gegeben ist durch

$$R(t) = R_0 + \frac{\alpha}{\rho}\, t\,,$$

wobei $\alpha > 0$ eine Konstante ist.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Wassertropfen am Ort $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes ist seine Beschleunigung gegeben durch

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\kappa(t)\vec{v}(t) - g\vec{e}_z\,, \qquad \kappa(t) = \frac{3\alpha}{\rho R(t)} \tag{$*$}$$

Dabei bezeichnet $\vec{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung, welcher senkrecht auf der Erdoberfläche steht und nach oben zeigt.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Massenpunktes als Funktion der Zeit.
Hinweis: Führen Sie in Gleichung $(*)$ die Substitution

$$\vec{v}(t) = \vec{\phi}(t) \exp\left(- \int_0^t \kappa(t')dt' \right)$$

durch und bestimmen Sie zunächst die Funktion $\vec{\phi}(t)$.

Bitte wenden.

(c) Zeigen Sie, dass die Fallgeschwindigkeit des Tropfens im Grenzfall $R_0 \ll (\alpha/\rho)\,t$ linear mit der Zeit anwächst. Wie groß ist die Fallbeschleunigung in diesem Grenzfall?

(d) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$.

(e) Zeigen Sie, ohne Verwendung des Ergebnisses aus Teilaufgabe (c), dass die z-Komponente des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ im Grenzfall $R_0 \ll (\alpha/\rho)\,t$ quadratisch mit der Zeit anwächst.

Aufgabe 14: Abrutschendes Seil

Ein Seil der Länge l rutscht über eine Kante ab (vgl. Abbildung). Wenn man die Reibung des aufliegenden Seilstücks vernachlässigt, wirkt auf das überhängende Stück der Länge x die Beschleunigung

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l}\,x(t)\,. \qquad (**)$$

Das Seil werde zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhelage losgelassen, wobei ein Stück der Länge x_0 herabhängt, das heißt $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $(**)$ durch

$$x(t) = A\cosh(kt) + B\sinh(kt)$$

gelöst wird, und bestimmen Sie A, B und k.

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn das Seilende gerade über die Kante rutscht?