Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/

WS 10/11 – Blatt 06
Abgabe: 23.11.2010
Besprechung: 26.11.2010

(*) Aufgabe 15 (2P): Matrizenmultiplikation

Berechnen Sie die Produkte AB und BA für die Matrizen

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Multiplikation dieser Matrizen kommutativ? Das heißt, gilt $AB - BA = 0$?

(*) Aufgabe 16 (7P): Eigenwerte und Eigenvektoren

(a) Berechnen Sie $B = A - \lambda \mathbb{1}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B.

(c) Bestimmen Sie die drei Lösungen für λ der Gleichung $\det B = 0$.

(d) Lösen Sie für jedes λ die Gleichung $B\vec{x} = 0$ nach $\vec{x}$ auf, wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(*) Aufgabe 17 (11P): Dreidimensionale Drehungen

Eine allgemeine Drehung eines kartesischen Koordinatensystems im dreidimensionalen Raum läßt sich durch das Produkt dreier aufeinanderfolgender Drehungen beschreiben. Diese sind definiert durch die Vorschrift, dass zuerst um den Winkel ϕ um die z-Achse gedreht wird, dann um den Winkel θ um die *neue* x-Achse und schließlich um den Winkel ψ um die *neue* z-Achse. Die assoziierte Drehmatrix ist $O(\phi, \theta, \psi) = O_z(\psi) O_x(\theta) O_z(\phi)$, wobei

$$O_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad O_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Drehmatrizen um die x- bzw. z-Achse sind.

(a) Berechnen Sie die Matrix $O(\phi, \theta, \psi)$.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $O(\phi, \theta, \psi)$.

(c) Zeigen Sie, dass $O^T(\phi, \theta, \psi) = O^{-1}(\phi, \theta, \psi)$.
Hinweis: Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ gilt $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Bitte wenden.

(d) Zeigen Sie, dass die Zeilen- und Spaltenvektoren von $O(\phi, \theta, \psi)$ die Länge 1 haben und paarweise orthogonal aufeinander stehen.

(e) Zeigen Sie, dass Drehungen um verschiedene Achsen im allgemeinen nicht vertauschen. Berechnen Sie dazu $O_x(\theta)O_z(\phi)$, $O_z(\phi)O_x(\theta)$ und $O_x(\theta)O_z(\phi) - O_z(\phi)O_x(\theta)$.

Aufgabe 18: Skalarprodukt und Drehungen

(a) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zwischen zwei beliebigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhalten bleibt, wenn man beide Vektoren um den Winkel θ dreht.

(b) Zeigen Sie, dass der Winkel α zwischen zwei beliebigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhalten bleibt, wenn man beide Vektoren um den Winkel θ dreht.

Aufgabe 19: Drehung im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sei die Matrix

$$O = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass O eine Drehmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie die Drehachse.
Hinweis: Die Drehachse $\vec{a}$ bleibt bei der Drehung ungeändert: $O\vec{a} = \vec{a}$. Aus dieser Bedingung können Sie $\vec{a}$ bestimmen.

(c) Bestimmen Sie den Drehwinkel.
Hinweis: Betrachten Sie dazu einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Für den Winkel θ zwischen zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{b}'$ gilt: $\vec{b} \cdot \vec{b}' = |\vec{b}||\vec{b}'| \cos\theta$.