Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
`http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/`

WS 10/11 – Blatt 07
Abgabe: 30.11.2010
Besprechung: 03.12.2010

(*) Aufgabe 20 (11P): Kugelkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{r}$ lassen sich durch Kugelkoordinaten ausdrücken, welche für $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ und $\phi \in (0, 2\pi)$ wie folgt definiert sind:

$$K \,:\, \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x(r,\theta,\phi) \\ y(r,\theta,\phi) \\ z(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}\right|}, \quad \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}\right|}, \quad \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}\right|}$$

und bestimmen Sie ihre Skalar- und Kreuzprodukte.

Hinweis: Das Symbol „∂“ bezeichnet eine partielle Ableitung. Die Regeln sind analog zur „gewöhnlichen“ Ableitung, wobei die restlichen Variablen als konstant angenommen werden.

(b) Berechnen Sie die ersten zeitlichen Ableitungen der in Teilaufgabe (a) definierten Einheitsvektoren. Drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ aus.

(c) $\vec{r}(t)$ beschreibe die Bahn eines Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit t. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes in Kugelkoordinaten. Drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

(d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 21: Zylinderkoordinaten

(a) Die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{r}$ lassen sich durch Zylinderkoordinaten ausdrücken, welche für $\rho \in (0, \infty)$, $\phi \in (0, 2\pi)$ und $z \in (-\infty, \infty)$ wie folgt definiert sind:

$$Z \,:\, \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(\rho,\phi,z) = \begin{pmatrix} x(\rho,\phi,z) \\ y(\rho,\phi,z) \\ z(\rho,\phi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\rho,\phi,z)}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(\rho,\phi,z)}{\partial \rho}\right|}, \quad \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\rho,\phi,z)}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(\rho,\phi,z)}{\partial \phi}\right|}, \quad \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\rho,\phi,z)}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(\rho,\phi,z)}{\partial z}\right|}$$

und bestimmen Sie ihre Skalar- und Kreuzprodukte.

Bitte wenden.

(b) Berechnen Sie die ersten zeitlichen Ableitungen der in Teilaufgabe (a) definierten Einheitsvektoren. Drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ aus.

(*) Aufgabe 22 (9P): Massenpunkt auf Kegel

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der inneren Seite eines auf der Spitze stehenden Kegels. Die Parameterdarstellung seiner Bahnkurve lautet für $0 \leq t \leq t_0$ in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \cos \omega t \\ \rho_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \sin \omega t \\ h_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \end{pmatrix},$$

wobei ρ_0, h_0, t_0 und ω konstante positive Parameter sind.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve in Zylinderkoordinaten an.

Hinweis: Zylinderkoordinaten wurden in Aufgabe 21 definiert. Die ortsabhängigen Einheitsvektoren dieser Koordinaten sind gegeben durch

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

(c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 23: Flächeninhalt und Volumen

(a) Berechnen Sie die Fläche eines Kreises mit Radius R unter Verwendung von (i) kartesischen Koordinaten und (ii) Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius R unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

(c) Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen eines geraden Kegels mit Höhe H und Öffnungswinkel α unter Verwendung von (i) Kugel- und (ii) Zylinderkoordinaten.

Übungsklausur

Die Übungsklausur findet am Freitag, dem 17.12.2010, im Rahmen der Übungen statt, und wird mit 60 Punkten bewertet. Bitte beachten Sie, dass Sie an der Übungsklausur nur in dem Ihnen zugeteilten Tutorium teilnehmen können. Bringen Sie bitte zur Kontrolle Ihren Studentenausweis mit. Es werden keine Hilfsmittel zugelassen.