Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/

WS 10/11 – Blatt 08
Abgabe: 07.12.2010
Besprechung: 10.12.2010

(*) Aufgabe 24 (10P): Galilei-Transformationen

Eine eigentliche orthochrone Galilei-Transformation kann durch die Abbildung

$$g\,:\,\begin{pmatrix}\vec{r}\\ t\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\vec{r}'\\ t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O^{-1}\vec{r}-\vec{w}t-\vec{b}\\ t+s\end{pmatrix},$$

beschrieben werden, wobei O eine orthogonale Matrix mit $\det O=1$ ist. Der Vektor $\vec{w}$ bezeichnet eine konstante Geschwindigkeit und $\vec{b}$ und s konstante Verschiebungen in Raum bzw. Zeit. Die Menge aller eigentlichen orthochronen Galilei-Transformationen läßt sich durch die Elemente $g=g(O,\vec{w},\vec{b},s)$ beschreiben. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass diese Menge eine Gruppe (im mathematischen Sinne) bildet. Sie wird mit $G_+^\uparrow$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass das nacheinander Ausführen von zwei beliebigen Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation ergibt und bestimmen Sie die Parameter dieser Transformation in Abhängigkeit der Parameter der ursprünglichen Transformationen. Spielt die Reihenfolge der Ausführung eine Rolle?

Man schreibt die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen kompakt als

$$g'(O',\vec{w}',\vec{b}',s')=g_2(O_2,\vec{w}_2,\vec{b}_2,s_2)\circ g_1(O_1,\vec{w}_1,\vec{b}_1,s_1)\,. \tag{$*$}$$

Nach Teilaufgabe (a) gilt $g'\in G_+^\uparrow$. Zeigen Sie jetzt, dass $G_+^\uparrow$ die Gruppenaxiome erfüllt:

(b) Die Verknüpfungsoperation $(*)$ ist assoziativ, d.h. $g_3\circ(g_2\circ g_1)=(g_3\circ g_2)\circ g_1$.

(c) Es existiert ein neutrales Element E, so dass für jede Transformation $g\in G_+^\uparrow$ gilt: $g\circ E=E\circ g=g$.

(d) Zu jedem Gruppenelement $g\in G_+^\uparrow$ gibt es eine inverse Transformation g^{-1}, so dass $g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=E$.

(*) Aufgabe 25 (10P): Bezugssysteme

Ein Massenpunkt bewegt sich im Inertialsystem I, das durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ aufgespannt wird, auf folgender Bahnkurve:

$$\vec{r}(t)=R\cos(\omega t)\vec{e}_1+R\sin(\omega t)\vec{e}_2\,.$$

Geben Sie die Bahnkurve in den Bezugssystemen $B_a,\,\ldots,\,B_f$ an, wobei

(a) B_a aus I durch eine Verschiebung des Ursprungs um den Vektor $\vec{d}=R_0\vec{e}_2$ ($R_0=$ konst) hervorgeht.

Bitte wenden.

(b) B_b sich relativ zu I mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = R_0\,\omega\vec{e}_1$ ($R_0 = \text{konst}\,, \omega = \text{konst}$) bewegt. (Die Koordinatenursprünge beider Systeme fallen zur Zeit $t = 0$ zusammen). Skizzieren Sie die Bahnkurve für (i) $R_0 < R$, (ii) $R_0 = R$ und (iii) $R_0 > R$.

(c) B_c aus einer Drehung von I um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn um die x_3-Achse von I hervorgeht.

(d) B_d gleichförmig gegen den Uhrzeigersinn mit Winkelgeschwindigkeit ω um die x_3-Achse von I rotiert (d.h. der Drehwinkel ist $\phi(t) = \omega t$).

(e) B_e sich relativ zu I mit der Beschleunigung $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ ($a_1, a_2 = \text{konst}$) bewegt. (Für $t = 0$ sollen die Koordinatenursprünge beider Systeme zusammenfallen und die Relativgeschwindigkeit beider Systeme verschwinden.)

(f) Finden Sie eine Transformation in ein Bezugssystem B_f, so dass der Massenpunkt in B_f eine gleichförmige geradlinige Bewegung beschreibt.

(g) Welches der Bezugssysteme $B_a, \ldots, B_f$ ist ein Inertialsystem?

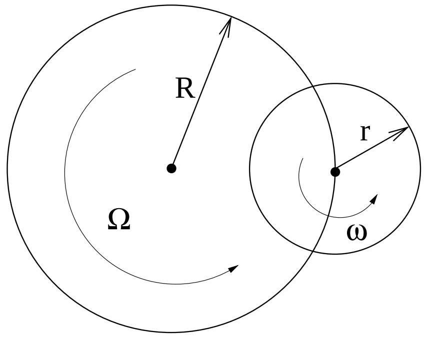
Aufgabe 26 : Bewegung auf einem Karussell

Eine Scheibe mit Radius R rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. An deren Rand ist eine zweite Scheibe mit Radius $r < R$ befestigt. Diese rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega > \Omega$ (siehe Skizze).

(a) Wie lautet, von einem Inertialsystem aus gesehen, die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Punktes, der sich am Rand der kleinen Scheibe befindet? Verwenden Sie hierbei kartesische Koordinaten. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Punkt bei $\vec{r}(0) = (R + r, 0)^{\mathrm{T}}$.

(b) Skizzieren Sie die im Inertialsystem beobachtete Bahnkurve.

(c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes.



Elektronische Anmeldung in QISPOS

Die Anmeldung zu den Vorleistungen ist noch bis zum 21.01.2011 freigeschaltet.