Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
`http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/`

WS 10/11 – Blatt 10
Abgabe: 11.01.2011
Besprechung: 14.01.2011

(*) Aufgabe 30 (7P): Energieerhaltung

Ein Massenpunkt mit zeitlich konstanter Masse m bewegt sich in einer Dimension unter dem Einfluß einer Kraft $F(x)$.

(a) Leiten Sie ausgehend von der Gleichung

$$F(x) = m\ddot{x} \qquad (*)$$

den Energieerhaltungssatz her. Drücken Sie dazu die Kraft $F(x)$ durch das zugehörige Potential

$$V(x) = -\int_{x_R}^{x} F(x')dx' \quad (x_R \text{ ist ein beliebiger Referenzpunkt})$$

aus, multiplizieren Sie die Gleichung $(*)$ mit $\dot{x}$ und integrieren Sie über t.

(b) Die in (a) eingeführte Integrationskonstante kann als Gesamtenergie E interpretiert werden. Zeigen Sie nun mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes, dass die Umkehrfunktion $t(x)$ der Bahnkurve durch

$$t(x) - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} \qquad (**)$$

gegeben ist, wobei $x_0 = x(t_0)$.

(c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $F(x) = -kx$ und die Anfangsbedingung $x(0) = x_0 > 0$, $\dot{x}(0) = 0$. (i) Skizzieren Sie das zugehörige Potential $V(x)$ und bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung. (ii) Berechnen Sie das Integral $(**)$. (iii) Skizzieren Sie die resultierende Bahnkurve $x(t)$.

Aufgabe 31: Gradient, Divergenz und Rotation

(a) Gegeben seien eine skalare Funktion $\phi(\vec{r})$ und eine vektorielle Funktion $\vec{f}(\vec{r})$, die zweimal stetig partiell differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass gilt

(i) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) = 0\,,$

(ii) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) = 0\,,$

(iii) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) = \triangle\,\phi(\vec{r})\,,$

(iv) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{f}(\vec{r}) - \triangle\,\vec{f}(\vec{r})\,,$

(v) $\operatorname{div}(\phi(\vec{r})\,\vec{f}(\vec{r})) = \vec{f}(\vec{r})\cdot\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) + \phi(\vec{r})\operatorname{div}\vec{f}(\vec{r})\,,$

(vi) $\operatorname{rot}(\phi(\vec{r})\,\vec{f}(\vec{r})) = \operatorname{grad}\phi(\vec{r})\times\vec{f}(\vec{r}) + \phi(\vec{r})\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r})\,,$

Bitte wenden.

wobei der Laplace-Operator „$\triangle$“ gegeben ist durch

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \, .$$

(b) Betrachten Sie nun die Funktion $\vec{f}(\vec{r}) = \psi(r)\frac{\vec{r}}{r}$ mit $r = |\vec{r}|$ ($\psi(r)$ sei eine differenzierbare skalare Funktion). Berechnen Sie

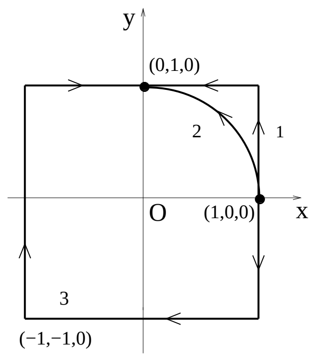
$$\text{(i)} \quad \operatorname{div} \vec{f}(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \quad \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{r}) \, .$$

(*) Aufgabe 32 (13P): Wegintegrale

Gegeben seien die drei Kräfte

$$\vec{F}_a(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{F}_b(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\vec{r}^{\,2}} , \quad \vec{F}_c(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie für jede dieser drei Kräfte die Wegintegrale $\int_C \vec{F}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, $i = a, b, c$, entlang der drei skizzierten Wege in der xy-Ebene von $(1, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$.



Aufgabe 33: Satz von Stokes

(a) Verifizieren Sie den Satz von Stokes,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad (*)$$

für die Funktion $\vec{F} = x^2 y\, \vec{e}_x + 2yz\, \vec{e}_y + 3xz\, \vec{e}_z$. Die Integrationsfläche S sei die Einheitskreisscheibe in der xy-Ebene, ∂S deren Rand, und $d\vec{\sigma}$ ein infinitesimales vektorielles Flächenelement.

(b) Betrachten Sie nun das Kraftfeld $\vec{F} = F_x\, \vec{e}_x + F_y\, \vec{e}_y + F_z\, \vec{e}_z$.

$$F_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad F_y = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad F_z = 0 \, ,$$

Berechnen Sie wieder die beiden Integrale aus $(*)$, und interpretieren Sie das Ergebnis. Berechnen Sie auch $\int_{\partial S'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, wobei $\partial S'$ der Rand der Einheitskreisscheibe S ist, deren Mittelpunkt um eine Längeneinheit in x-Richtung verschoben wurde.

Wir wünschen Ihnen erholsame Weihnachtsferien
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!