(30) (a) $V(x) = -\int_{x_R}^{x} F(x')\,dx' \Rightarrow F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

$(*) \Rightarrow -\frac{dV}{dx} = m\ddot{x} \Rightarrow -\frac{dV}{dx}\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x}$

$\Rightarrow -\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^2}{2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = C \mathrel{\hat{=}} E$ (Energie)

(b) $\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E \Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt' = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}$

Vorzeichen „±" hängt von den Anfangsbedingungen ab ($\dot{x} \gtrless 0$)

(c) (i) $F(x) = -kx \Rightarrow V(x) = -\int_{x_R}^{x} kx'\,dx' = \frac{1}{2}kx'^2\Big|_{x_R}^{x} = \frac{1}{2}kx^2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}kx_R^2}}_{\text{irrelevante Konstante}}$

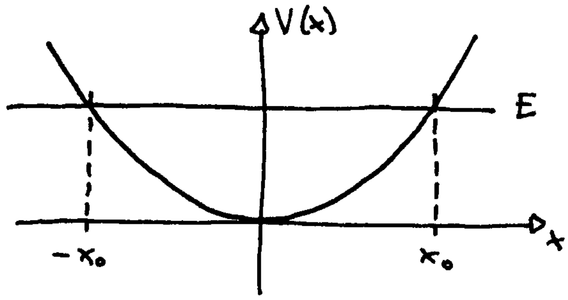
Umkehrpunkte:

$E = \frac{m}{2}\dot{x}(0)^2 + \frac{1}{2}k\,x(0)^2 = \frac{kx_0^2}{2}$

$\Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = \pm x_0$

Die Bewegung des Massenpunktes findet im Intervall $[-x_0, x_0]$ statt.



(ii) $t(x) - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E - \frac{kx'^2}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x'^2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}}$

$t_0 = 0,\; x_0 = x(t_0) > 0 \Rightarrow$ Massenpunkt bewegt sich nach links, dh $x(t)$ nimmt ab $\Rightarrow$ „−" Vorzeichen

$$NR: \int \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substituiere} \\ x' = x_0 \sin\varphi}}{=} \int \frac{x_0 \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{x_0^2 - x_0^2 \sin^2\varphi}} = \int d\varphi = \varphi = \arcsin\left(\frac{x'}{x_0}\right)$$

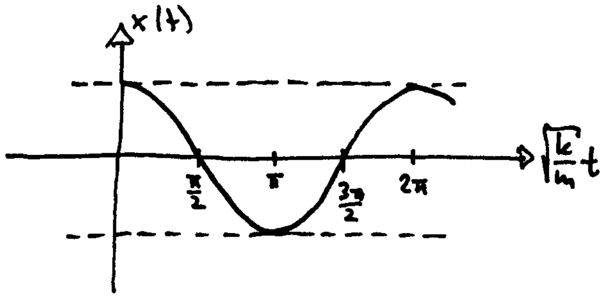
$$x' \in [-x_0, x_0] \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\sin^2\varphi} = +\cos\varphi$$

$$\Rightarrow t(x) = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{x'}{x_0}\right)\Big|_{x_0}^{x} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad (\square)$$

(iii) $(\square) \Rightarrow x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$



(31) (a) Bemerkung: $\phi, \vec{f}$ zweimal stetig diffbar $\Rightarrow$ partielle Ableitungen sind vertauschbar (Satz von Schwarz): $\partial_x\partial_y\phi = \partial_y\partial_x\phi, \dots$

(i) $\text{rot}\,\text{grad}\,\phi = \text{rot}\begin{pmatrix}\partial_x\phi\\ \partial_y\phi\\ \partial_z\phi\end{pmatrix} = \vec{e}_x(\partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi) + \vec{e}_y(\partial_z\partial_x\phi - \partial_x\partial_z\phi)$
$+ \vec{e}_z(\partial_x\partial_y\phi - \partial_y\partial_x\phi) = 0$

(ii) $\text{div}\,\text{rot}\,\vec{f} = \text{div}[\vec{e}_x(\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \vec{e}_y(\partial_z f_x - \partial_x f_z) + \vec{e}_z(\partial_x f_y - \partial_y f_x)]$
$= \partial_x(\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \partial_y(\partial_z f_x - \partial_x f_z) + \partial_z(\partial_x f_y - \partial_y f_x) = 0$

(iii) $\text{div}\,\text{grad}\,\phi = \partial_x(\partial_x\phi) + \partial_y(\partial_y\phi) + \partial_z(\partial_z\phi) = \Delta\phi$

(iv) $\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{f} = \text{rot}((\partial_y f_z - \partial_z f_y), (\partial_z f_x - \partial_x f_z), (\partial_x f_y - \partial_y f_x))^T$
$= \vec{e}_x[\partial_y(\partial_x f_y - \partial_y f_x) - \partial_z(\partial_y f_x - \partial_x f_y)]$
$+ \vec{e}_y[\partial_z(\partial_y f_z - \partial_z f_y) - \partial_x(\partial_x f_y - \partial_y f_x)]$
$+ \vec{e}_z[\partial_x(\partial_z f_x - \partial_x f_z) - \partial_y(\partial_y f_z - \partial_z f_y)]$
$= \vec{e}_x[\underline{\partial_x^2 f_x} + \partial_y\partial_x f_y + \partial_z\partial_x f_z - \underline{\partial_x^2 f_x} - \partial_y^2 f_x - \partial_z^2 f_z]$
$+ \vec{e}_y[\partial_x\partial_y f_x + \underline{\partial_y^2 f_y} + \partial_z\partial_y f_z - \partial_x^2 f_y - \underline{\partial_y^2 f_y} - \partial_z^2 f_y]$
$+ \vec{e}_z[\partial_x\partial_z f_x + \partial_y\partial_z f_y + \underline{\partial_z^2 f_z} - \partial_x^2 f_z - \partial_y^2 f_z - \underline{\partial_z^2 f_z}]$
$= \vec{e}_x[\partial_x(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z) - \Delta f_x]$
$+ \vec{e}_y[\partial_y(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z) - \Delta f_y]$
$+ \vec{e}_z[\partial_z(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z) - \Delta f_z] = \text{grad}\,\text{div}\,\vec{f} - \Delta\vec{f}$

(v) $\text{div}(\phi\vec{f}) = \partial_x(\phi f_x) + \partial_y(\phi f_y) + \partial_z(\phi f_z) = (\partial_x\phi)f_x + (\partial_y\phi)f_y$
$+ (\partial_z\phi)f_z + \phi(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z) = \text{grad}\,\phi\cdot\vec{f} + \phi\,\text{div}\,\vec{f}$

(vi) $\text{rot}(\phi\vec{f}) = \vec{e}_x[\partial_y(\phi f_z) - \partial_z(\phi f_y)] + \vec{e}_y[\partial_z(\phi f_x) - \partial_x(\phi f_z)]$
$+ \vec{e}_z[\partial_x(\phi f_y) - \partial_y(\phi f_x)]$
$= \vec{e}_x[(\partial_y\phi)f_z - (\partial_z\phi)f_y + \phi(\partial_y f_z - \partial_z f_y)]$

$$+\vec{e}_y\left[(\partial_z\phi)f_x-(\partial_x\phi)f_z+\phi(\partial_z f_x-\partial_x f_z)\right]$$

$$+\vec{e}_z\left[(\partial_x\phi)f_y-(\partial_y\phi)f_x+\phi(\partial_x f_y-\partial_y f_x)\right]$$

$$=\operatorname{grad}\phi\times\vec{f}+\phi\operatorname{rot}\vec{f}$$

(b) (i) $\operatorname{div}\left(\psi(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)\overset{(a)(v)}{=}\operatorname{grad}\psi(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}+\psi(r)\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}=\partial_x\left(\frac{x}{r}\right)+\partial_y\left(\frac{y}{r}\right)+\partial_z\left(\frac{z}{r}\right)$

$$=\frac{3}{r}-(x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z)\frac{1}{r}$$

$$\overset{NR1}{=}\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

NR1: $\partial_x r^{-1}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x=-\frac{x}{r^3},\dots$

$\operatorname{grad}\psi(r)=\vec{e}_x\partial_x\psi+\vec{e}_y\partial_y\psi+\vec{e}_z\partial_z\psi$

$$=\frac{d\psi}{dr}\left(\vec{e}_x\partial_x r+\vec{e}_y\partial_y r+\vec{e}_z\partial_z r\right),\quad\partial_x\psi=\frac{d\psi}{dr}\partial_x r,\dots$$

$$\overset{NR2}{=}\frac{d\psi}{dr}\left(\vec{e}_x\frac{x}{r}+\vec{e}_y\frac{y}{r}+\vec{e}_z\frac{z}{r}\right)=\frac{d\psi}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

NR2: $\partial_x r=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\cdot 2x=\frac{x}{r},\dots$

$$\Rightarrow\operatorname{div}\left(\psi(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{d\psi(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}+\psi(r)\frac{2}{r}=\frac{d\psi(r)}{dr}+\frac{2}{r}\psi(r)$$

(ii) $\operatorname{rot}\left(\psi(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)\overset{(a)(vi)}{=}\operatorname{grad}\psi(r)\times\frac{\vec{r}}{r}+\psi(r)\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

$\operatorname{grad}\psi(r)=\frac{d\psi(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$ (wurde in (b)(i) gezeigt) $\Rightarrow\operatorname{grad}\psi(r)\times\frac{\vec{r}}{r}=0$

$\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\vec{e}_x\left(\partial_y\frac{z}{r}-\partial_z\frac{y}{r}\right)+\vec{e}_y\left(\partial_z\frac{x}{r}-\partial_x\frac{z}{r}\right)+\vec{e}_z\left(\partial_x\frac{y}{r}-\partial_y\frac{x}{r}\right)$

$$\overset{NR1}{=}\vec{e}_x\left(-\frac{zy}{r^3}+\frac{yz}{r^3}\right)+\vec{e}_y\left(-\frac{xz}{r^3}+\frac{zx}{r^3}\right)+\vec{e}_z\left(-\frac{yx}{r^3}+\frac{xy}{r^3}\right)=0$$

$\Rightarrow\operatorname{rot}\left(\psi(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)=0$

(32) Parametrisierung von Weg 1: $\vec{r}_{1,1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0,1] \Rightarrow d\vec{r}_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$$\vec{r}_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0,1] \Rightarrow d\vec{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}_a(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}_a(\vec{r}_{1,1}(t)) \cdot d\vec{r}_{1,1} + \int_0^1 \vec{F}_a(\vec{r}_{1,2}(t)) \cdot d\vec{r}_{1,2}$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 2\,dt + \int_0^1 (-1)\,dt = 2 - 1 = 1$$

$$\int_{C_1} \vec{F}_b(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2+1} \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{1-t}{1+(1-t)^2} dt \quad \text{, substituiere } s = 1-t$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt - \int_1^0 \frac{s}{1+s^2} (-ds) = 0$$

$$\int_{C_1} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+(1-t)^2} dt \quad \text{, subst. } s = 1-t$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+s^2} ds = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= 2 \arctan t \Big|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Parametrisierung von Weg 2: $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow d\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \vec{F}_a(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin^2 t + 2\cos^2 t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^2 t - 1\right) dt = \left[\frac{3t}{2} + \frac{3}{2}\cos t \sin t - t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{C_2} \vec{F}_b(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

$$\int_{C_2} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

Parametrisierung von Weg 3: $\vec{r}_{3,1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0,1] \Rightarrow d\vec{r}_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$\vec{r}_{3,2}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [-1,1] \Rightarrow d\vec{r}_{3,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$\vec{r}_{3,3}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [-1,1] \Rightarrow d\vec{r}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$\vec{r}_{3,4}(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0,1] \Rightarrow d\vec{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$$\Rightarrow \int_{C_3} \vec{F}_a(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} -t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (-2)\, dt + \int_{-1}^1 dt + \int_{-1}^1 (-2)\, dt + \int_0^1 dt = -\int_0^1 dt - \int_{-1}^1 dt$$

$$= -1 - (1-(-1)) = -3$$

$$\int_{C_3} \vec{F}_b(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$+ \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+(t-1)^2} \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{-1}^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{-1}^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(t-1)\,dt}{1+(t-1)^2}}_{= \int_{-1}^0 \frac{s\,ds}{1+s^2} \text{, subst. } s=t-1}$$

$$= 3 \int_{-1}^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} = 0$$

, da der Integrand eine ungerade Funktion ist: $f(-t) = -f(t)$ mit $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

$$\int_{C_3} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$+ \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2+1} \begin{pmatrix} -1 \\ t-1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} - \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{1+(t-1)^2}}_{= \int_{-1}^0 \frac{ds}{1+s^2} \text{, subst. } s=t-1}$$

$$= -3 \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -3 \arctan t \Big|_{-1}^1$$

$$= -3 \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = -\frac{3\pi}{2}$$

Bemerkungen:

- $\vec{\nabla} \times \vec{F}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \int_C \vec{F}_a \cdot d\vec{r}$ ist wegabhängig

- $\vec{\nabla} \times \vec{F}_b = 0 \quad \left(\partial_x \frac{1}{r^2} = -\frac{2x}{r^4}, \dots \right)$ & Definitionsgebiet $\mathbb{R}^3 / \{0\}$ ($\vec{F}_b$ ist singulär für $\vec{r} = 0$!) ist einfach zusammenhängend (d.h. jede geschlossene Kurve kann zu einem Punkt zusammen gezogen werden).

  $\Rightarrow \int_C \vec{F}_b \cdot d\vec{r}$ ist wegunabhängig

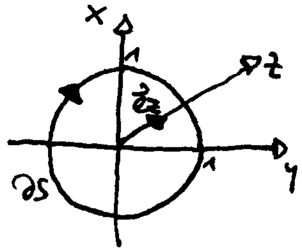
- $\vec{\nabla} \times \vec{F}_c = 0$, aber: $\vec{F}_c$ ist singulär auf der z-Achse, d.h. das Definitionsgebiet ist $\mathbb{R}^3 / z$-Achse, und dieses ist nicht einfach zusammenhängend.

  $\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$, weil z-Achse nicht von $C_1 \cup C_2$ eingeschlossen wird.

  $\int_{C_3} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_1} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$, weil z-Achse von $C_1 \cup C_3$ eingeschlossen wird.

33 (a) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = -2y\,\vec{e}_x - 3z\,\vec{e}_y - x^2\,\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{\sigma} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{e}_z\, d\sigma$$
$$= -\int_S x^2\, d\sigma$$



Wir wählen als Flächennormale $\vec{e}_z$. Damit ist die Umlaufrichtung der Parametrisierung von ∂S festgelegt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix},\ t\in[0,2\pi]$$

Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $d\sigma = r\,dr\,d\varphi$

$$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{\sigma} = -\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^3\cos^2\varphi$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\cos^2\varphi$$
$$\overset{NR}{=} -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}$$

Nun Integration längs des Randes ∂S in der $z=0$ Ebene:

$$\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\partial S}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin t)\,\vec{e}_x\cdot(-\sin t\,\vec{e}_x + \cos t\,\vec{e}_y)\,dt$$
$$= -\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt \overset{NR}{=} -\left[\frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32}\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(b) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\,\vec{e}_z = 0 \Rightarrow \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{\sigma} = 0$

$$\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\partial S}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{-\sin t\,\vec{e}_x + \cos t\,\vec{e}_y}{\sin^2 t + \cos^2 t}\cdot(-\sin t\,\vec{e}_x + \cos t\,\vec{e}_y)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$ (mit der Parametrisierung von $\vec{r}(t)$ aus (a))

$\Rightarrow$ Der Satz von Stokes gilt nicht! Grund: $\vec{F}$ ist singulär auf der z-Achse, und $\mathbb{R}^3/z$-Achse ist nicht einfach zusammenhängend (siehe Bemerkung zu $\vec{F}_C(\vec{r})$ aus Aufgabe 32). Nur für Integrationswege C, die die z-Achse nicht einschließen gilt $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, und damit auch der Satz von Stokes.

Parametrisierung von $\partial S'$: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \int_{\partial S'} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t\,\vec{e}_x + (1+\cos t)\vec{e}_y}{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t} \cdot \left(-\sin t\,\vec{e}_x + \cos t\,\vec{e}_y\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t}{2+2\cos t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi$$

Die z-Achse liegt hier nicht im Inneren sondern auf dem Rand. Die Singularität trägt daher nicht mit voller Stärke bei.

<u>NR:</u> $\int \cos^k x\, dx = \int \cos^{k-1} x \cos x\, dx \overset{PI}{=} \cos^{k-1} x \sin x + (k-1)\int \cos^{k-2} x \sin^2 x\, dx$

$$= \cos^{k-1} x \sin x + (k-1)\int \cos^{k-2} x\, dx - (k-1)\int \cos^k x\, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^k x\, dx = \frac{1}{k}\cos^{k-1} x \cdot \sin x + \frac{k-1}{k}\int \cos^{k-2} x\, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x \sin^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, dx - \int \cos^4 x\, dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\cos x \sin x - \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\cos x \sin x - \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\sin x \cos x - \frac{1}{8}\cos^3 x \sin x - \frac{1}{8}\underbrace{\cos^3 x}_{=\cos x(1-\sin^2 x)} \sin x$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{8}\left(\cos^3 x \sin x - \cos x \sin^3 x\right)$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{8}(\cos^2 t - \sin^2 t)\sin t \cos t = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x)$$