Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/

WS 10/11 – Blatt 12
Abgabe: 25.01.2011
Besprechung: 28.01.2011

Aufgabe 38: Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$\text{(i)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\,\frac{dy}{dx} - 5y = x^2 + 2e^{3x}\,, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 10\,\frac{dy}{dx} + 25y = 20\cos(2x)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ansätze $y(x) = Ax^2 + Bx + C + De^{3x}$ bzw. $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, mit A, B, C, $D \in \mathbb{R}$, um eine partikuläre Lösung für (i) bzw. (ii) zu bestimmen.

(*) Aufgabe 39 (20P): Angetriebener harmonischer Oszillator

(a) Der mit der Kraft $F(t)$ angetriebene, gedämpfte harmonische Oszillator wird durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)\,, \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}\,, \tag{$*$}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet m die Masse, ρ die Dämpfungskonstante und ω_0 die Eigenfrequenz des Oszillators. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ für $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ mit f_0, $\omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz vom Typ $x(t) = x_0\, e^{i\omega t}$, mit $x_0 = |x_0|\, e^{i\delta}$, um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.

(b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz, bei der die Amplitude des Oszillators im stationären Zustand ein Maximum erreicht, und geben Sie die maximale Amplitude an. Stellen Sie die Amplitude des Oszillators nach dem Einschwingvorgang als Funktion von ω graphisch dar.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $(*)$ für den Fall, dass keine Dämpfung vorhanden ist und die Frequenz der erregenden Kraft mit der Eigenfrequenz des Oszillators übereinstimmt. Skizzieren Sie die Lösung.

Aufgabe 40: Deltafunktion

Die Dirac'sche δ-Funktion ist eine Distribution mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)\, \phi(x) = \phi(0)$$

für alle Testfunktionen $\phi(x)$, das heißt für unendlich oft differenzierbare $\phi(x)$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\phi(x)| < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \phi(x)\, x^n = 0 \;\; \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Bitte wenden.

Die δ-Funktion läßt sich nicht als gewöhnliche Funktion darstellen. Es gibt aber Funktionenfolgen δ_n, die im Sinne einer Distribution gegen δ konvergieren, das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_n(x)\, \phi(x) = \phi(0)\,.$$

Wesentlich ist hierbei, dass der Limes außerhalb des Integrals steht.

(a) Zeigen Sie, dass für die Gauß'sche Glockenkurve im Distributionssinn

$$\delta(x) = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right)$$

gilt, das heißt beweisen Sie für beliebige Testfunktionen

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right) \phi(x) = \phi(0)\,.$$

(b) Zeigen Sie analog zu (a), dass gilt:

$$\text{(i)}\;\; \delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}\,, \quad \text{(ii)}\;\; \delta(x) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\,, \quad \text{(iii)}\;\; \delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,.$$

(c) Zeigen Sie außerdem, dass gilt:

$$\text{(i)}\; \delta(-x) = \delta(x)\,, \quad \text{(ii)}\; x\,\delta(x) = 0\,, \quad \text{(iii)}\; \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\,,$$

$$\text{(iv)}\; \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]\,.$$

Elektronische Anmeldung in QISPOS

Bitte beachten Sie, dass die Anmeldung zu den Vorleistungen nur noch bis zum 21.01.2011 freigeschaltet ist.

Information für Studenten der Sudiengänge Bachelor Meteorologie und Lehramt Physik/Mathematik

Um sich zu den Vorleistungen anzumelden, schicken Sie bitte bis spätestens 21.01.2011 eine Email, die Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer enthält, an ewerth@particle.uni-karlsruhe.de.