Klassische Theoretische Physik I

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
`http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/`

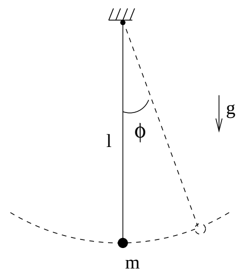
WS 10/11 – Blatt 13
Abgabe: 01.02.2011
Besprechung: 04.02.2011

(*) Aufgabe 41 (12P): Mathematisches Pendel

(a) Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels lautet

$$ml\ddot{\phi} + mg\sin\phi = 0\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass man für den Grenzfall kleiner Auslenkungen die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators erhält und bestimmen Sie die dazugehörige Schwingungsdauer T_0.



Hinweis: Entwickeln Sie die Funktion $\sin\phi$ bis zur führenden Ordnung in eine Taylorreihe um den Punkt $\phi = 0$ (d.h. um die Ruhelage). Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ um $x = x_0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!}(x-x_0)^i + O((x-x_0)^{n+1})\,,$$

wobei $f^{(i)}$ die i-te Ableitung der Funktion f bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass der allgemeine Ausdruck für die Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels (1) gegeben ist durch

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}\,, \tag{2}$$

wobei ϕ_0 die Maximalauslenkung bezeichnet.

Hinweis: Berechnen Sie mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes $E = ml^2\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$ die Umkehrfunktion $t(\phi)$ der Bahnkurve (analog zu Aufgabe 30(b)) und leiten Sie daraus (2) ab.

(c) Leiten Sie folgende zu Gleichung (2) äquivalente Form her:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,, \quad k = \sin\frac{\phi_0}{2}\,. \tag{3}$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Ersetzen Sie $\cos\phi$ mit Hilfe der Relation $\cos\phi = 1-2\sin^2(\phi/2)$ und führen Sie danach die Variablentransformation $\sin(\phi/2) = \sin(\phi_0/2)\sin x$ aus.

(d) Bestimmen Sie die Abweichung der Schwingungsdauer des Pendels von der des harmonischen Oszillators (T_0). Entwickeln Sie dazu den Integranden aus (3) für $k \ll 1$ bis zur Ordnung k^2 und berechnen Sie das auftretende Integral.

Bitte wenden.

(e) (*freiwillig*) Bestimmen Sie die zu dieser Näherung gehörige Lösung $\phi(t)$ für die Anfangsbedingung $\phi(0) = \phi_0$. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- Entwickeln Sie $\sin\phi$ in Gleichung (1) bis einschliesslich $O(\phi^3)$ und verwenden Sie den Ansatz $\phi(t) = \phi^{(1)}(t) + \phi^{(2)}(t)$ mit $\phi^{(2)}(t) \ll \phi^{(1)}(t)$ und $\phi^{(1)}(t) = \phi_0 \cos(\omega t)$, wobei $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$.
- Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (d), dass $\omega^{(2)} = -\phi_0^2\omega_0/16$ gilt.

  Hinweis: Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $(\omega^{(2)})^n$ mit $n \geq 2$.
- Bestimmen Sie die Differentialgleichung für $\phi^{(2)}(t)$ und lösen Sie diese.

  Hinweis: Beachten Sie, dass $\phi^{(2)}(t)$ von der Ordnung ϕ_0^3 ist und vernachlässigen Sie alle Terme der Ordnung ϕ_0^n mit $n \geq 4$. Ersetzen Sie $\cos^3 x$ mit Hilfe der Relation $\cos^3 x = (3\cos x + \cos 3x)/4$. Für die partikuläre Lösung bietet sich der Ansatz $\phi_p^{(2)}(t) = C\cos(3\omega t)$ mit $C \in \mathbb{R}$ an.

(*) Aufgabe 42 (8P): Green'sche Funktion

Die Green'sche Funktion $G(t, t')$ für den gedämpften harmonischen Oszillator erfüllt die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho\,\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) G(t, t') \;=\; \delta(t - t')\,. \tag{4}$$

(a) Bestimmen Sie die Green'sche Funktion $G(t, t')$ für den Kriechfall ($w_0 < \rho/2$).

(b) Bestimmen Sie für den Kriechfall die Lösung der Bewegungsgleichung des angetriebenen harmonischen Oszillators

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho\,\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x(t) \;=\; F(t) \tag{5}$$

für die Kraftfunktionen

(i) $F(t) = F_0\, t\, \theta(t)\theta(t_0 - t)$ mit $t_0 > 0$ und

(ii) (*freiwillig*) $F(t) = F_0\, \sin(\omega t)\theta(t)$.

Benutzen Sie dazu die in Teilaufgabe (a) bestimmte Green'sche Funktion um einen partikuläre Lösung von (5) zu bestimmen. Wie lautet die allgemeine Lösung von (5) für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$? Untersuchen Sie die Lösung für Fall (ii) für große Zeiten t und zeigen Sie, dass die Lösung in diesem Limes mit der aus Aufgabe 39 (a) übereinstimmt.

Hinweis:

$$\int \mathrm{d}y\, y\, e^{a(x-y)} = -\frac{ay+1}{a^2}\, e^{a(x-y)}\,,$$

$$\int \mathrm{d}y\, \sin(by)\, e^{a(x-y)} = -\frac{1}{a^2+b^2}[b\cos(by) + a\sin(by)]e^{a(x-y)}\,.$$

Bitte beachten Sie die Ankündigung der schriftlichen Prüfung auf

`http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~ewerth/`