

Theorie A Infosheet: Lineare Differentialgleichungen

Philipp Oehler

09.02.2011

1 Lineare Differentialgleichungen

Differentialgleichungen spielen in der theoretischen Physik eine unglaublich wichtige Rolle. Die meisten fundamentalen Gleichungen der Physik sind als Differentialgleichungen formuliert, zum Beispiel die Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik, die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik oder die Navier-Stokes-Gleichung der Strömungsmechanik. Der in der Vorlesung und Übung behandelte harmonische Oszillator ist eine erste Einführung in dieses Gebiet.

Differentialgleichungen sind anfangs vielleicht verwirrend - aus der richtigen Perspektive betrachtet aber halb so wild. Ich werde hier erstmal nur die einfacheren linearen, homogenen und inhomogenen DGLs betrachten. Das reicht für den Anfang und bringt viel fürs Verständnis. Zudem lassen sich nichtlineare oft gar nicht erst lösen.

2 Was bedeutet überhaupt linear?

Linear heisst hier - vereinfacht ausgedrückt - dass man, wenn man für eine homogene DGL mehrere Lösungen hat, diese beliebig summieren kann - und diese Summe stellt auch eine Lösung dar! Sind beispielsweise die Funktionen A und B Lösungen einer DGL, so ist $(4A + 2B)$ auch eine. Das Einsetzen von $(4A + 2B)$ in die DGL ist nichts anderes, als $4A$ und $2B$ getrennt einzusetzen, und die resultierenden Gleichungen einfach zu addieren. Diese Eigenschaft wird benötigt, um Anfangsbedingungen der DGL einzubringen.

Dies ist so, weil homogene Lösungen bzw. Fundamentalsysteme von homogenen DGLs immer **eine Null erzeugen** auf der rechten Seite, wenn man sie in die DGL einsetzt - somit erzeugen auch beliebige Linearkombinationen eine Null und ändern nichts an der DGL.

Zudem haben lineare DGLs einen unheimlichen Vorteil - kennt man für zwei Probleme, die durch dieselbe DGL beschrieben werden, die Lösung, so kann man für ein drittes Problem, welches aus den beiden anderen kombiniert besteht, die zwei bekannten Lösungen einfach addieren! Beispiel: Wellen werden durch die sogenannte Wellengleichung beschrieben, eine partielle DGL zweiten Grades. Kennt man nun die Lösung für eine von links nach rechts laufende und eine von rechts nach links laufende Welle, so kann man, wenn man wissen will, was passiert, wenn sich diese beiden Wellen überlagern, die beiden Lösungen einfach

addieren - fertig!

Das ganze nennt sich 'Superpositionsprinzip'. Praktischerweise sind viele grundlegende DGLs der Physik linear, was das Lösen von Problemen ungemein vereinfacht. Einige, wie beispielsweise die Einsteinschen Feldgleichungen und die Navier-Stokes-Gleichungen, sind dies leider nicht... das ist auch der Grund, weshalb Strömungsberechnungen sehr schnell **sehr** kompliziert werden, oder man 50 Jahre gebraucht hat, um sich drehende schwarze Löcher zu beschreiben (Kerr-Metrik).

3 Grundlegendes Vorgehen zum Lösen

DGLs stellen einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen dar. Diese Funktion ist im Allgemeinen unbekannt und zu bestimmen. Hierzu braucht man zunächst einen Ansatz. Dieser enthält freie Parameter, die man bestimmen muss. Die Summe aller Lösungen aus diesem Ansatz (die sog. **Fundamentalsysteme**), mit vorangestellten Konstanten, ist die **homogene** Lösung.

Tritt in der DGL eine Inhomogenität auf, also ein Term, in dem weder die Funktion oder ihre Ableitungen vorkommen, so benötigt man zusätzlich eine **partikuläre** oder **spezielle** Lösung. Die Summe aus beiden stellt dann die **allgemeine** Lösung dar. Also

$$y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}}$$

Grundlegend lässt sich sagen: Für eine **DGL n-ten Grades** benötigt man **n Anfangsbedingungen** und **n Fundamentalsysteme**. Ein Fundamentalsystem ist eine Lösung der DGL - bei den behandelten homogenen linearen DGLs eben die Terme der Form $e^{\pm\lambda_{1/2} \cdot x}$ oder $x \cdot e^{\lambda \cdot x}$. Man kann niemals ein Fundamentalsystem für zwei Konstanten verwenden, da man diese sonst zusammenfassen könnte, zum Beispiel

$$A \cdot e^{-\lambda t} + B \cdot e^{-\lambda t} = (A + B) \cdot e^{-\lambda t} \equiv C \cdot e^{-\lambda t}$$

...und man hat wieder nur eine Konstante. Eine zu wenig, um alle Anfangsbedingungen unter zu bringen.

Falls man ein Fundamentalsystem zu wenig hat, und ein weiteres benötigt (wie zum Beispiel wegen einer doppelten Nullstelle für das λ wie beim Kriechfall des harmonischen Oszillators), so ist ein weiteres oft ein bisheriges mit vorangestelltem x (bzw. t). Hat man also, zum Beispiel, eines als $e^{\lambda x}$, so ist sehr wahrscheinlich $x \cdot e^{\lambda x}$ (oder bei höheren Ordnungen $x^2 \cdot e^{\lambda x}$) auch eines.

4 DGLs ersten Grades und die Trennung der Veränderlichen

Ein wichtiges Verfahren zum Lösen von DGLs ersten Grades ist das Verfahren der Trennung der Veränderlichen. Dies beruht darauf, dass man die Variablen der Gleichung 'sortiert'

also durch Umformen beispielsweise alle Ausdrücke mit y nach links, und alle mit x nach rechts bringt, und dann integriert. Das funktioniert wie folgt:

Es liegt beispielsweise die DGL

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

vor. Zunächst bringt man das y nach rechts

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Nun teilt man durch y und multipliziert mit dx durch

$$\frac{dy}{y} = dx$$

Jetzt hat man alle jeweiligen Größen auf einer Seite. Nun kann man integrieren:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\Rightarrow \ln(y) = x + c$$

Nun hat man die Lösung:

$$y = A \cdot e^x$$

mit $A = e^c$.

Der Koeffizient A bzw. C muss über Anfangsbedingungen bestimmt werden - diese sind in der Problemstellung gegeben. Hier sieht man sehr schön, dass diese freien Konstanten aus der Integration kommen.

5 Die homogene Lösung

Das Standard-Verfahren bei homogenen Dgls zweiter Ordnung ist das Einsetzen des Ansatzes $x = e^\lambda$. Dies führt zu einer charakteristischen Gleichung für das λ , welche im Idealfall zwei Lösungen hat. Dieses Verfahren kennt ihr bereits aus der Vorlesung und aus den Übungen, ich werds hier nicht nochmal näher erläutern.

6 Tricks bei Inhomogenitäten

Die homogene Lösung ist meistens einfach zu finden - komplizierter wirds bei der inhomogenen Lösung. Ein Ansatz, der oft gut klappt, ist sich aus allen Termen des inhomogenen Teils und deren Ableitungen einen Ansatz zu basteln. z.B.:

inhomogene Funktion:

$$x^2 + \cos(3x)$$

'gebastelter' Ansatz:

$$Ax^2 + Bx + C + D \cos(3x) + E \sin(3x)$$

Einfach alle Terme ableiten, und mit Konstanten aufsummieren. Diesen Ansatz setzt man nun in die inhomogene DGL ein (und muss ihn dann an den jeweiligen Stellen natürlich ableiten) und bestimmt die Konstanten dann durch einen Koeffizientenvergleich mit der ursprünglichen inhomogenen Funktion - fertig!

Hier findet ihr dazu weitere Info:

http://math-www.uni-paderborn.de/~mathkit/Inhalte/DGlen/data/manifest10/Lsg_inhomDGL_2_Ord_konst_Koeff.html

7 Variation der Konstanten

Ein wichtiges Verfahren zum finden einer partikulären Lösung ist die 'Variation der Konstanten'. Hier nimmt man die bekannte homogene Lösung und ersetzt deren Konstanten durch unbekannte Funktionen. Diese setzt man in die DGL ein, und führt wieder einen Koeffizientenvergleich durch. Nun erhält man weitere DGLs für die unbekannten Funktionen, die man nun leicht lösen kann. Diese Lösungen für die unbekannten Funktionen stellt nun eine partikuläre Lösung dar

Dieses Verfahren kann auch zur Bestimmung weiterer Fundamentallösungen genutzt werden, falls der normale Ansatz nur eine liefert.

Die 'Variation der Konstanten' basiert auf der Annahme, dass partikuläre Lösungen 'ähnlich' sein müssen wie die homogene.

Nochmal genauer...

7.1 Variation der Konstanten bei DGL 1. Grades

Gehen wir wieder von der DGL von vorhin aus, nur diesmal mit einem inhomogenen Term:

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

Die homogene Lösung kennen wir bereits:

$$y = A \cdot e^x$$

Nun machen wir wie oben beschrieben den Ansatz mit A als *Funktion* anstatt als Konstante:

$$y_p = A(x) \cdot e^x$$

und setzen diesen in die DGL ein. Hierzu benötigen wir noch die Ableitung:

$$y'_p = A' \cdot e^x + A \cdot e^x$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL ergibt das:

$$A' \cdot e^x + A \cdot e^x - A \cdot e^x = A' \cdot e^x = x$$

Hieraus lässt sich nun A leicht durch Integration bestimmen:

$$A = \frac{dA}{dx} = x \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow A = \int dx x \cdot e^{-x} \stackrel{P.I.}{=} -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$$

Nun hat man A bestimmt! Setzt man nun A wieder in den Ansatz ein, erhält man die partikuläre Lösung:

$$y_p = A(x) \cdot e^x = -(x+1)$$

...und der löst tatsächlich die inhomogene DGL!

7.2 Variation der Konstanten bei DGL höheren Grades

Bei inhomogenen DGLs höheren Grades funktioniert das variieren der Konstanten prinzipiell genauso wie bei DGLs ersten Grades, allerdings muss man hier eine Sache beachten, um das nicht zu kompliziert werden zu lassen. Leitet man den Variationsansatz nämlich n-mal ab, so bekommt man eine Gleichung mit n zu bestimmenden Funktionen - wir benötigen für die partikuläre Lösung jedoch lediglich eine (zudem ist das Gleichungssystem, dass dann resultiert, ist massiv überbestimmt). Darum darf man (n-1) Forderungen stellen, also pro Ableitungsschritt eine beliebige Gleichung aufstellen. Dies nutzen wir, um alle höheren Ableitungen Null zu setzen. Das klingt sicher verwirrend, ich zeig das am besten anhand eines Beispiels:

Gehen wir von der DGL

$$y'' + 4y' - 12y = x$$

aus. Diese hat die homogene Lösung

$$y_h = Ae^{-6x} + Be^{2x}$$

wie man mit einem $e^{\lambda x}$ -Ansatz leicht herausfindet. Nun 'variiert' man das A und das B, um einen Ansatz für die partiuläre Lösung zu erhalten:

$$y_p = A(x)e^{-6x} + B(x)e^{2x}$$

Diesen setzt man nun in die obige DGL ein... zuerst muss man aber die erste und zweite Ableitung bestimmen:

$$y'_p = A'e^{-6x} - 6Ae^{-6x} + 2Be^{2x} + B'e^{2x}$$

Wenn wir diesen Term nun nochmal ableiten, um y''_p zu bestimmen, erhalten wir A und B in der zweiten Ableitung - das stört. Deshalb können wir hier die Forderung bringen, dass diese sich gegenseitig wegheben:

$$A'e^{-6x} + B'e^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow y'_p = -6Ae^{-6x} + 2Be^{2x} +$$

Man kann derartige Forderungen (n-1) mal treffen - also bei jeder Ableitung, außer bei der letzten. Hieraus bilden wir nun die zweite Ableitung:

$$y'_p = -6A'e^{-6x} + 36Ae^{-6x} + 4Be^{2x} + 2B'e^{2x}$$

und setzten das alles nun oben in die ursprüngliche DGl ein. Die meisten Terme heben sich weg (rechnet's mal nach) und es bleibt übrig:

$$-6A'e^{-6x} + 2B'e^{2x} = x$$

So weit so gut - wir haben jetzt, mit dieser Gleichung und unserer Forderung, zwei Gleichungen, um zwei Unbekannte A' und B' zu bestimmen:

$$A'e^{-6x} + B'e^{2x} = 0$$

$$-6A'e^{-6x} + 2B'e^{2x} = x$$

Das kann man nun natürlich als Matrix schöner schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{-6x} \\ Be^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Zumindest kann mans so schöner lösen... durch einfaches Umformen erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{-6x} \\ Be^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/8 \\ x/8 \end{pmatrix}$$

und somit

$$A' = -\frac{x}{8}e^{6x}$$

$$B' = \frac{x}{8}e^{-2x}$$

Beim rüberziehn der exp-Funktion ändert sich natürlich das Vorzeichen im Exponenten. Nun brauch man nur noch zu integrieren und erhält:

$$A = \frac{1}{288}e^{6x}(1 - 6x)$$

$$B = \frac{1}{32}e^{-2x}(2x + 1)$$

Setzt man das nun in den ursprünglichen Ansatz $y_p = A(x)e^{-6x} + B(x)e^{2x}$ ein, so heben sich die exp-Funktionen gerade weg und nach zusammenfassen bleibt:

$$y_p = -\frac{1}{12}x - \frac{1}{36}$$

als partikuläre Lösung, und

$$y'_p = -\frac{1}{12}$$

$$y''_p = 0$$

als Ableitungen. Setzt man das nun in die DGl ein, erhält man:

$$-\frac{1}{3} + x + \frac{1}{3} = x$$

und das ist genau der inhomogene Term! bääm!

8 Literatur

- Sehr hilfreich mit genauer Erläuterung: *Mathematik, Arens et al., Spektrum*
Zum Beispiel ist auf Seite 954 die Variation der Konstanten super erklärt.
- Gute 'Kochrezeptesammlung' für das Thema ist *Das gelbe Rechenbuch Band 3, Furlan, Verlag Martina Furlan*
- Brauchbar zum Üben ist auch das *Repetitorium der höheren Mathematik, Merzinger/Wirth, Binomi-Verlag*
- Ansonsten: de.wikipedia.com und google.com liefern auch oft gute Infos :)