

Theorie A Infosheet: Was ist eine Vektorprojektion?

Philipp Oehler

01.11.2010

Einige von euch hatten mir gemailt, dass sie Probleme mit Aufgabe 7 hatten. Ihr solltet beweisen, dass die Projektion eines Vektors \vec{a} auf einen Vektor \vec{b} gegeben ist durch

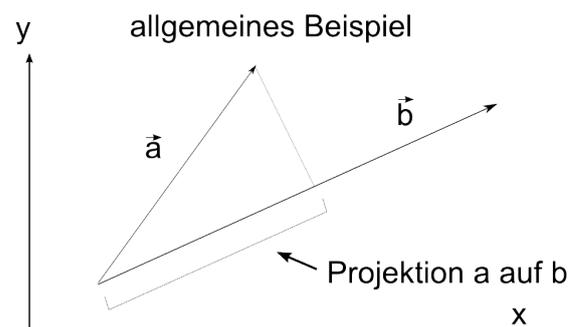
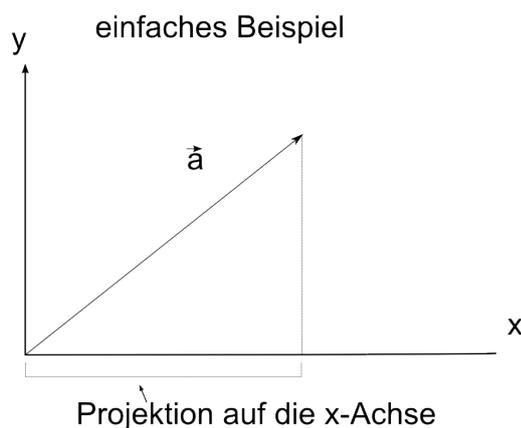
$$\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

Aber was ist überhaupt eine Projektion?

Gewöhnlich ist die Projektion eines Vektors \vec{a} auf einen Vektor \vec{b} der Längenteil des Vektors \vec{a} , der in Richtung des Vektors \vec{b} zeigt.

Einfaches Beispiel: Angenommen, ihr habt einen beliebigen Vektor a , mit den Komponenten (a_x, a_y, a_z) , oder sagen wir, $(5, 3, 2)$, und ihr wollt den Vektor auf die x-Achse $(1, 0, 0)$ projizieren, dann ist die Projektion von a auf die x-Achse gerade dessen x-Komponente $a_x = 5$. Dementsprechend sind dann die die Projektionen auf die y- und z-Achse auch die jeweiligen Komponenten.

Allgemeineres Beispiel: ihr habt zwei Vektoren a und b , und ihr wollt die Projektion von a auf b haben, also der Anteil des Vektors a , der in b -Richtung zeigt. Dann...siehe Beispielbild:



Ihr könnt euch das so vorstellen, dass die Projektion der 'Schatten' ist, den Vektor \vec{a} auf Vektor \vec{b} wirft, wenn man senkrecht über dem Vektor \vec{b} eine Lampe anbringt.

Der Term $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ stellt übrigens den Einheitsvektor in Richtung \vec{b} dar. Man erhält aus jedem beliebigen Vektor den Einheitsvektor in seine Richtung (also den Vektor mit Länge 1), indem man ihn durch seinen Betrag (= seine Länge) teilt. Wenn ihr nun also den ProjektionsVEKTOR haben wollt, multipliziert ihr einfach noch mal mit dem Einheitsvektor durch:

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Und wie beweist man das alles? Ein Tipp: der Trick ist, dass man sich für den Beweis das Koordinatensystem der Vektoren so legen kann, wie man will, da die Komponenten ja nicht festgelegt sind. D.h., man kann die Richtung des Vektors \vec{b} einfach als x-Achse definieren, und.... naja, rechnen müsst ihr schon selbst ;)