

Theorie A Infosheet: Integration durch Substitution

Philipp Oehler

01.11.2010

1 Substitution

Da das Thema ja bei den meisten von euch nicht in der Schule behandelt wurde, will ich hier nochmal kurz das Wichtigste zusammenfassen. Substitution im Allgemeinen ist die Ersetzung einer Variable durch einen neuen definierten Term einer anderen Variable. Ihr kennt das wohl schon aus Polynomgleichungen. Wenn man zum Beispiel die Nullstelle eines Polynoms höheren Grades bestimmen soll, wendet man das oft an. Beispiel:

$$x^4 + 3x^2 + 5 = 0$$

Durch x zu teilen bringt hier wenig... deshalb definiert man:

$$t = x^2$$

und erhält mit

$$t^2 + 3t + 5 = 0$$

eine quadratische Gleichung, die man direkt lösen kann! Durch Rücksubstitution (= auflösen von x nach t) erhält man dann die gesuchte Lösung (bzw. die 4 Lösungen).

Nun kann man dieses Verfahren auch bei Integralen anwenden. Hier muss man allerdings berücksichtigen, was man mit dem Differential dx macht.

Ein Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Das ist ja so erstmal nicht zu lösen (außer man weiss, dass $\frac{1}{1+x^2}$ die Ableitung des $\arcsinh(x)$ ist). Wir wählen folgende Substitution:

$$x = \sinh(t) \Leftrightarrow t = \operatorname{arsinh}(x)$$

(wieso ich gerade diese Substitution wähle, erkläre ich später)

Falls das Integral bestimmt ist, also Grenzen hat, müsst ihr diese Grenzen natürlich auch immer mitsubstituieren.

Aber was machen wir nun mit dem Differential dx , wie ersetzt man das? Der Trick ist, einfach die Ableitung der Substitution zu betrachten. Diese ist der Quotient aus den beiden Differentialen, also:

$$\frac{dx}{dt} = \cosh(t) \Leftrightarrow dx = \cosh(t)dt$$

Welche Variable man hier nach welcher ableitet, ist prinzipiell egal (ihr könnt also auch dt/dx bilden). Dies können wir nun einsetzen:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}} dt$$

Nun können wir in der Wurzel das sinh-Additionstheorem von Blatt 1 einsetzen:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}} dt &= \int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{\cosh^2(t)}} dt = \int \frac{\cosh(t)}{\cosh(t)} dt = \int 1 \cdot dt = t \end{aligned}$$

Integral gelöst!

Nun nur noch Rücksubstituieren:

$$t = \operatorname{arsinh}(x) \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh}(x)$$

Der arsinh , wer hätt's gedacht...

Aber wie kommt man auf die richtigen Substitutionen?

2 Standardsubstitutionen

Ein wichtiger Trick beim Integrieren mit Substitutionen ist, gerade bei Wurzelfunktionen, das ausnutzen von Additionstheoremen. Die wichtigsten beiden sind die folgenden für $\sin/\cos$ - und $\sinh/\cosh$ -Funktionen:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Mit diesen kann man Ausdrücke vom Typ $\sqrt{x^2 \pm 1}$ zu einem linearen Ausdruck 'killen', wie im obigen Beispiel. Die $\sin/\cos$ - und $\sinh/\cosh$ -Funktionen sind also Standardsubstitutionen für Funktionen, in denen Wurzelausdrücke dieser Art vorkommen.

Falls die Terme in der Wurzel allerdings komplizierter werden, muss man anders rangehen. Bei Ausdrücken der Form $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ führt man in der Wurzel eine quadratische

Ergänzung durch, um den Term in der Wurzel als Binom zusammenfassen zu können. Somit bringt man die Wurzel auf die Form $\sqrt{y^2 + c^2}$ mit der neuen Variable y als Substitution für das Binom $x - x_0$ und der Konstante y_0 , welche zu bestimmen sind. Nun hat man den Wurzelterm so weit vereinfacht, dass wir nun wieder die Additionstheoreme ausnutzen können! Dieses Vorhaben kennt ihr ja bereits von Aufgabe 4.

Noch mehr zur Substitution und zu Standardsubstitutionen findet ihr...

3 Literatur

... in Arens 'Mathematik' ab Seite 398 mit einer Tabelle für Standardsubstitutionen auf Seite 403.

Ein anderes, sehr hilfreiches Buch mit einer Menge 'Kochrezepten' zur Integratioin ist 'Das gelbe Rechenbuch' von Peter Furlan.

Ihr findet beides in der Unibib, aber gerade die gelben Rechenbücher sind leider alle chronisch verliehen.