Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 2

Abgabe: Mo, 31.10.'11, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 6: ϵ–Tensor **[$2+2=4$]**

(a) Überzeugen Sie sich von der Identität

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

durch einsetzen einiger Indices und durch allgemeine Symmetrieüberlegungen aufgrund der Eigenschaften des ϵ–Tensors.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Identität, dass für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})\ .$$

Aufgabe 7: Parallel– und Senkrechtkomponenten **[$2+1+3=6$]**

(a) Betrachten Sie zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^2$. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{u}$ in eine Parallel– und eine Senkrechtkomponente bzgl. $\vec{r}$, so dass gilt $\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp}$ mit $(\vec{u}_{\|} \| \vec{r})$ und $(\vec{u}_{\perp} \perp \vec{r})$.

(b) Berechnen Sie $\vec{u}_{\|}$ und $\vec{u}_{\perp}$ für das Beispiel $\vec{u} = (1,1)$ und $\vec{r} = (2,1)$.

(c) Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$: $\vec{v}_1 = (2,2,2)$, $\vec{v}_2 = (1,1,0)$ und $\vec{v}_3 = (1,0,2)$. Bestimmen Sie drei orthonormierte Vektoren $\vec{u}_i (i = 1,2,3)$ mit den Eigenschaften

$$\text{(i)} \quad \vec{u}_1 \| \vec{v}_1 \qquad \text{(ii)} \quad \vec{u}_2 \quad \text{in } \vec{v}_1\text{–}\vec{v}_2 \text{ Ebene}\ .$$

Sie sollen dabei ohne das Kreuzprodukt auskommen!

Aufgabe 8: Hilfsmittel **[$2+1=3$]**

(a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{1 - \cos x}\, \mathrm{d}x$$

(b) Beweisen Sie die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

und bestimmen Sie damit Formeln für trigonometrische Funktionen mit dem doppelten Argument: $\sin(2x)$ und $\cos(2x)$.

(b.w.)

Aufgabe 9: Kardioide **[$5 + 2 = 7$]**

Gegeben ist die Herzkurve oder *Kardioide* (im $\mathbb{R}^2$) in Parameterform

$$\vec{x}(t) = \big(\cos t(1 - \cos t), \sin t(1 - \cos t) \big) \ .$$

Skizzieren Sie die Kurve. Wo könnte es Probleme mit der Stetigkeit kinematischer Größen geben? Berechnen Sie

(a) die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$,

(b) die Beschleunigung $\vec{a}(t)$,

(c) den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}(t)|$,

(d) den Betrag der Beschleunigung $a(t) = |\vec{a}(t)|$,

(e) die Länge der Kurve nach einem Umlauf, $0 \leq t < 2\pi$.

Wäre die Geschwindigkeit bei der gleichen Bahnkurve, aber einer anderen Parametrisierung auch noch stetig?

$\sum_{\textbf{Blatt2}} = \mathbf{20}$