Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 3

Abgabe: Mo, 7.11.'11, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 10: Rotierendes Bezugssystem [$1+2=3$]

Ein zweidimensionales Bezugssystem sei durch seine zwei normierten und orthogonalen Basisvektoren $\hat{x}$ und $\hat{y}$ bestimmt. Ein um den Winkel ϕ um den Koordinatenursprung gedrehtes System habe die (ebenfalls orthonormalen) Achsen $\hat{x}'$ und $\hat{y}'$.

(a) Drücken Sie $\hat{x}'$ und $\hat{y}'$ durch $\hat{x}$ und $\hat{y}$ aus.

(b) Wie lautet ein Vektor $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ im gedrehten System, also ausgedrückt durch die Basisvektoren $\hat{x}'$ und $\hat{y}'$?

Aufgabe 11: Vektoren [$1+2+1+1=5$]

(a) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)\ , \quad \vec{b} = (1, 3, 2)\ , \quad \vec{c} = (-2\sin\phi, 2\cos\phi, 1)\ , \quad \vec{d} = (\tfrac{1}{2}\sin\phi, \tfrac{1}{2}\cos\phi, -3)\ ,$$

berechnen Sie

$$S = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})\ .$$

(b) Wie lauten die Vektoren

$$\vec{x} = (2, 5, 1)\ , \qquad \vec{y} = (1, -2, 4)$$

in der Basis der $\vec{u}_i$ aus Aufgabe 7 (c)? Zur Erinnerung:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\ , \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)\ , \qquad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\ .$$

(c) Berechnen Sie aus den Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ bzw. den transformierten Vektoren $\vec{x}', \vec{y}'$ aus Teil (b) die Skalarprodukte $\vec{x} \cdot \vec{y}$ und $\vec{x}' \cdot \vec{y}'$.

(d) Wie lautet die Größe S aus Teil (a), wenn Sie die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ zunächst in der Basis der $\vec{u}_i$ aus Teil (b) ausdrücken?

(b.w.)

Aufgabe 12: Schuh im Karussell **[$2 + 1 + 1 + 2 = 6$]**

Auf der Mess' steht ein Karussell. Es besteht aus einer Scheibe vom Radius R, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Mittelpunkt dreht. Sie sitzen auf einem Punkt im Abstand $r < R$ vom Mittelpunkt und verlieren bei $t = 0$ und $\vec{r}(0) = (r, 0)$ Ihren Schuh. Der Schuh gleitet reibungsfrei auf der glatten Oberfläche des Karussells.

(a) Bestimmen Sie den Ort des Schuh $\vec{r}(t)$ zu beliebigen Zeiten $t > 0$ sowohl von Ihnen aus, als auch im Bezugssystem eines Beobachters vor dem Karussell gesehen.

(b) Wie muss R gewählt werden, damit der Schuh nach genau einer Umdrehung am Rand angelangt?

(c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und deren Betrag in beiden Systemen.

(d) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Schuh auf der Scheibe zurücklegt.

Aufgabe 13: Zykloiden **[$1 + 1 + 2 + 2 = 6$]**

Ein Rad vom Radius ρ kann entlang der x–Richtung rollen und dreht sich dabei um den Winkel ϕ. Auf das Rad sei konzentrisch ein zweites Rad mit Radius $R = \lambda\rho$ montiert. Wir betrachten den Punkt $\vec{r}$ auf dem Rand des zweiten Rades, der bei $\phi = 0$ genau unterhalb des Mittelpunktes liegt.

(a) Bestimmen Sie den Ort $\vec{r}(\phi)$ des Punktes für beliebige Winkel ϕ.

(b) Skizzieren Sie die Kurve für die Fälle $\lambda < 1, \lambda = 1, \lambda > 1$.

(c) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(\phi)$ für den Spezialfall $\lambda = 1$. Wie lang ist die Kurve nach einem Umlauf des Rades?

(d) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $\hat{t}(\phi)$ und die Krümmung $\kappa(\phi)$.

$\sum_{\textbf{Blatt3}} = \mathbf{20}$