Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 4

Abgabe: Mo, 14.11.'11, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 14: Wir planen eine Achterbahn **$[3 \cdot 2 + 1 + 2 = 9]$**

Für den Bau einer Achterbahn steht eine Fläche von $x_{\text{tot}} = 20\,\text{m}$ Breite und $y_{\text{tot}} = 40\,\text{m}$ Länge zur Verfügung. Die Vorschriften erlauben eine Montage der Schienen bis zu $z_{\text{max}} = 10\,\text{m}$ Höhe. Der Antrieb der Achterbahn wird so gesteuert, dass sich folgende Bewegung ergibt:

Zu den Zeiten $t = 0$ und $t = T$ befinde befinde sich der Wagen in der Mitte des Grundstücks im Ursprung des Koordinatensystems und bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 in x–Richtung. Der Betrag der Beschleunigung $|\vec{a}| = a_0$ sei konstant. Während des ersten und letzten Viertels einer Fahrt der Periodendauer T betrage die vertikale Komponente der Beschleunigung a_v nach oben, dazwischen erfolge eine ebensolche Beschleunigung nach unten. Die Richtung des horizontalen Anteils $\vec{a}_h$ der Beschleunigung bilde mit der y–Achse in der ersten Hälfte der Periodendauer einen Winkel $\phi(t) = 4\pi t/T$. Die x–Komponente der Beschleunigung hat damit die Periode $T/2$ und sei negativ für $0 < t < T/4$. Zur Zeit $t = t' + T/2$ hat die y–Komponente das umgekehrte Vorzeichen wie zur Zeit t'.

(a) Geben Sie den Vektor der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ an. Verwenden Sie a_v, a_h und $\omega = 4\pi/T$ als Parameter.

(b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ als Funktion der Zeit. Verwenden Sie v_0, a_v, a_h und ω als Parameter.

(c) Geben Sie die Bahnkurve als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie zunächst wieder v_0, a_v, a_h und ω als Parameter.

(d) Nutzen Sie die Randbedingungen, die Gesamtfläche und die Vorschriften voll aus, um die Größen v_0, a_v und a_h durch z_{max}, x_{tot} und T bzw. ω auszudrücken.

(e) Skizzieren Sie die Achterbahn einmal in der Draufsicht (x–y–Ebene) und einmal in der Seitenansicht (y–z–Ebene).

Aufgabe 15: Partielle Ableitungen **$[1 + 1 = 2]$**

Gegeben ist die Funktion

$$F(\lambda, \omega, t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cos \omega t\,.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial \omega}\,.$$

Berechnen Sie auch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial t}\,, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \lambda}$$

und zeigen, dass es auf die Reihenfolge der Differenziation nicht ankommt.

(b.w.)

Aufgabe 16: Gradienten **[5]**

Wir untersuchen zwei skalare Felder $A(\vec{r})$ und $B(\vec{r})$ mit ($\vec{r} = (x, y, z), r = |\vec{r}|$):

$$A(\vec{r}) = \mathrm{e}^{-r^2} , \qquad B(\vec{r}) = \frac{x}{r^2 + a^2} \quad (a = \text{const}) .$$

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla} A(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} B(\vec{r})$. Skizzieren sie das Feld $\vec{\nabla} A(\vec{r})$. $\vec{\nabla} B(\vec{r})$ kann als Summe $\alpha(\vec{r})\hat{x} + \beta(\vec{r})\hat{r}$ geschrieben werden. Skizzieren Sie die beiden Teilfelder. Skizzieren Sie alle Felder in der x–y–Ebene.

Aufgabe 17: Kugelkoordinatenlinien **[$2 + 1 + 1 = 4$]**

In kartesischen Komponenten lautet ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$, ausgedrückt durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ,

$$\vec{r}(r, \theta, \phi) = r(\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta) .$$

Hält man jeweils zwei der Kugelkoordinaten fest, so erhält man die Koordinatenlinien der dritten Koordinate als parametrisierte Kurve mit der jeweils dritten Koordinate als Parameter, z.B. für die r–Koordinatenlinien

$$\vec{r}(r) = \vec{r}(r, \theta = \text{const}, \phi = \text{const}) .$$

An jedem Punkt $\vec{r}$ gibt es nun drei Koordinatenrichtungen $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$, die durch die Tangentialvektoren der Koordinatenlinien gegeben sind.

(a) Bestimmen Sie die Vektoren $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ und $\hat{\phi}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ ein Orthonormalsystem bilden.

(c) Zeigen Sie dass $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ ein Rechtssystem bilden.

$$\overline{\textstyle\sum_{\textbf{Blatt4}} = \mathbf{20}}$$