Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 5

Abgabe: Mo, 21.11.'11, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 18: Rotation und Divergenz **[$2+1+2=5$]**

(a) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt,

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})\big) = 0\,.$$

(b) Schreiben Sie für ein beliebiges Feld $\phi(\vec{r})$ den Ausdruck

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\phi(\vec{r})\right)$$

mit Hilfe des Laplace–Operators Δ,

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

(c) Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(r)$ mit $r = |\vec{r}|$ die Divergenz des Gradienten:

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad} f(r)\right)\;.$$

Aufgabe 19: Rechnen mit grad, div, rot **[$3+2=5$]**

(a) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der folgenden Vektorfelder ($\kappa = \text{const}$).

$$\vec{a} = (-y, x, 0)\;,\quad \vec{b} = (yz, zx, xy)\;,\quad \vec{c} = xyz(1,1,1)\;,\quad \vec{d} = (xz^2 + y, z^2 - \cos\kappa y, \ln x)\;.$$

(b) Berechnen Sie für die folgenden Skalarfelder jeweils den Gradienten und die Divergenz des Gradienten ($\alpha, \beta, \vec{k} = \text{const}$).

$$\phi = \alpha\cos 2y + \beta\sin z\;,\qquad \psi = \cos\vec{k}\cdot\vec{r}\;.$$

Aufgabe 20: Länge und Winkel bei Drehungen **[5]**

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zwei beliebige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (und damit die Längen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$) sowie der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bei Drehung des Koordinatensystems invariant sind.

(b.w.)

Aufgabe 21: Drehmatrizen **[$2+2+1=5$]**

(a) Wir untersuchen eine Matrix

$$D = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass D eine Drehmatrix ist.

(b) Eine Drehung $D(\alpha, \beta)$ sei aus zwei aufeinanderfolgenden Drehungen zusammengesetzt: zunächst eine Drehung mit Winkel β um die z–Achse, dann eine Drehung mit Winkel α um die x–Achse. Berechnen Sie $D(\alpha, \beta)$.

(c) Ist die Matrix D aus (a) eine Matrix $D(\alpha, \beta)$ wie in (b)? Falls ja, bestimmen Sie α und β.

$\sum_{\mathbf{Blatt5}} = \mathbf{20}$