Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 10

Abgabe: Mo, 16.1.'12, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 35: Schwingungsdauer des Fadenpendels **[$3+3+2+2=10$]**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Schwingungsdauer τ des Fadenpendels der Länge ℓ von der maximalen Auslenkung ϕ_0 abhängt und durch folgendes Integral gegeben ist,

$$\tau = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^{\phi_0} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2\cos\phi - 2\cos\phi_0}} \,,$$

wobei $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

(a) Zeigen Sie durch geeignete Substitutionen, dass die Schwingungsdauer durch das vollständige elliptische Integral 1. Art

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

ausgedrückt werden kann,

$$\tau = \frac{2}{\pi} F\left(\sin\frac{\phi_0}{2}\right) T_0 \,.$$

(b) Wir wollen Korrekturen der Schwingungsdauer zu kleinen ϕ_0 berechnen. Das entspricht kleinen $k = \sin\frac{\phi_0}{2}$. Berechnen Sie die führenden Terme von $F(k)$ für kleine k^2 bis zur Ordnung k^4. Zeigen Sie, dass dann

$$F(k) \approx \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] \,.$$

Entwickeln Sie dazu den Integranden in eine Taylorreihe in k^2 um $k^2 = 0$ und integrieren Sie Term für Term.

(c) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus (b), dass für kleine Auslenkungen die Schwingungsdauer

$$\tau = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\phi_0^2 + \frac{11}{3072}\phi_0^4 + \cdots\right)$$

lautet.

(d) Das Fadenpendel diene uns als Uhr. Sei $\phi_0 = 0.2$ ($\approx 11.5°$) und $T_0 = 1\,\mathrm{s}$. Die Uhr soll an einem Tag einen Gangunterschied von weniger als 1 s haben. Wie wenig darf das mittlere ϕ_0 dann nur von seinem Anfangswert abweichen? (Es genügt hier, die Korrekturen in ϕ_0^2 mitzunehmen!)

(b.w.)

Aufgabe 36: Rakete **[2 + 1 + 2 = 5]**

Eine Rakete wird durch den Rückstoß der ausströmenden Materie angetrieben. Die Masse der Rakete nimmt dabei mit der gleichen Rate ab, mit der Materie ausgestoßen wird. Wir untersuchen den Fall, dass Materie mit konstander Rate (Masse der ausgestoßenen Gase pro Zeiteinheit = *const.*) und konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ ausgestoßen wird .

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für eine solche Rakete, die im homogenen Gravitationsfeld der Erde vertikal nach oben fliegt.

(b) Die Rakete soll bei $t = 0$ aus der Ruhe starten. Bestimmen Sie $v(t)$.

(c) Bestimmen Sie die Höhe $h(t)$. Es sei $h(0) = 0$.

Aufgabe 37: Wegintegrale und Vektorfelder **[2 + 3 = 5]**

Gegeben sind die beiden Vektorfelder

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}\,, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\vec{\omega} = \text{const}).$$

(a) Berechnen Sie die Rotation der beiden Felder.

(b) Ein Wegintegral W des Vektorfeldes $\vec{V}$ entlang einer Kurve K sei definiert als

$$W = \int_K \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_K \vec{V}(\vec{r}(s)) \cdot \hat{t}(s)\, \mathrm{d}s.$$

Dabei ist $\vec{r}(s)$ die natürliche Parametrisierung des Weges vom Anfangs– zum Endpunkt der Kurve K. $\hat{t}(s)$ ist der normierte Tangentenvektor entlang der Kurve an der Stelle $\vec{r}(s)$.

Berechnen Sie W mit $\vec{V} = \vec{A}$ und $\vec{V} = \vec{B}$ für zwei verschiedene Kurven K_1 und K_2 in der x–y–Ebene bei $z = 0$. Beide Kurven haben den Ursprung $(0, 0, 0)$ als Anfangspunkt A und den Endpunkt E bei $(1, 0, 0)$. K_1 ist die Strecke von A nach E; K_2 verläuft in geraden Strecken von A über $(0, 1, 0)$ und danach $(1, 1, 0)$ nach E.

Was beobachten Sie? Wie könnte ein Zusammenhang mit der Wirbelstärke aus (a) lauten?

$\sum_{\textbf{Blatt10}} = \textbf{20}$