INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 1
Abgabe 22.10.2012
Besprechung 26.10.2012

Aufgabe 1: Taylorreihen (8 Punkte)

Die Taylorentwicklung ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Physik. Sie erlaubt uns, eine Funktion f in der Nähe eines x-Wertes x_0 durch ein Polynom zu approximieren. Sei f bei $x = x_0$ n mal differenzierbar und $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung von f bei $x = x_0$. (Insbesondere schreiben wir $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.) Für $x \approx x_0$ ist dann

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad . \tag{1}$$

Ist f bei x_0 unendlich oft differenzierbar, können wir n in (1) gegen unendlich gehen lassen. In diesem Fall spricht man von einer Taylorreihe. Für viele gebräuchliche Funktionen (genauer: für alle *analytischen* Funktionen) gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

für alle x, für die die unendliche Summe auf der rechten Seite konvergiert.

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$ beliebig) und geben Sie die Taylorreihe für $x_0 = 0$ an. Für welche Werte von x konvergieren die Taylorreihen? (Die letzte Frage wird nicht bewertet.)

a) $f(x) = e^x$ (2 Punkte)

b) $f(x) = \sin x$ (2 Punkte)

c) $f(x) = \cos x$ (2 Punkte)

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (2 Punkte)

Aufgabe 2: Additionssätze (6 Punkte)

a) Sei $\phi \in \mathbb{R}$ und i die imaginäre Einheit, also eine Zahl mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Zeigen Sie, dass

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

gilt. Verwenden Sie dazu die Taylorreihen aus Aufgabe 1. Falls Sie Aufgabe 1 nicht bearbeitet haben, schlagen Sie die Taylorreihen für e^x, $\sin x$ und $\cos x$ in der Literatur nach. (3 Punkte)

b) Beweisen Sie für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Additionssätze

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad ,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \quad .\end{aligned}$$

Wenden Sie dazu Ihr Ergebnis aus (a) auf beide Seiten der Gleichung $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ an. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Gammafunktion (6 Punkte)

Die Gammafunktion $\Gamma(z)$ ist definiert durch das bestimmte Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1}e^{-t} \quad .$$

a) Zeigen Sie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Verwenden Sie dazu die Formel für partielle Integration:

$$\int_a^b dx\, f(x)g(x) = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b dx\, f'(x)G(x) \quad ,$$

wobei G eine Stammfunktion von g ist. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ gilt. (3 Punkte)