Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

Übungsblatt 2
Abgabe 29.10.2012
Besprechung 2.11.2012

Aufgabe 4: Hyperbelfunktionen (10 Punkte)

Die Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{1}$$

heißen *Sinus Hyperbolicus* bzw. *Kosinus Hyperbolicus*. *Tangens* und *Kotangens Hyperbolicus* sind $\tanh x = (\sinh x)/\cosh x$ und $\coth x = 1/\tanh x$.

a) Zeigen Sie:
   i) $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$, (1 Punkt)
   ii) $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$, (1 Punkt)
   iii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} y$ und $\operatorname{arcosh} y$. Schränken Sie dabei den Definitionsbereich der cosh Funktion auf die positive reelle Achse ($x \geq 0$) ein. (3 Punkte)

c) Lösen Sie folgende unbestimmte Integrale für $t > a > 0$, indem Sie geschickt substituieren:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt \quad , \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt \quad .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5: Differentialgleichungen (10 Punkte)

In der Physik begegnet man oft *Differentialgleichungen*; das sind Gleichungen, die eine Funktion $y(x)$ mit ihren Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$ etc. verknüpfen. Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung einer bestimmten Klasse von Differentialgleichungen. Zunächst betrachten wir

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0, \tag{2}$$

wobei $f(x)$ eine beliebige reelle stetige Funktion ist.

a) Sei nun

$$z(x) = e^{F(x)} y(x) \quad ,$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist und $y(x)$ Gleichung (2) erfüllt. Zeigen Sie $z'(x) = 0$. (3 Punkte)

b) Geben Sie alle Funktionen $z(x)$ mit der Eigenschaft $z'(x) = 0$ an. Bestimmen Sie daraus alle Lösungen $y(x)$ der Gl. (2). Überprüfen Sie, ob sich die Lösungsmenge ändert, wenn Sie zur Stammfunktion $F(x)$ eine beliebige Konstante addieren. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge durch eine einzige reelle Konstante, die sog. *Integrationskonstante der Differentialgleichung* parametrisiert werden kann. (2 Punkte)

c) Lösen Sie Gl. (2) für die Fälle

   i) $f(x) = ax^b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq -1$, (1 Punkt)

   ii) $f(x) = a/x$ mit $a \in \mathbb{R}$. (1 Punkt)

d) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x), \tag{3}$$

wobei $g(x)$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist.
Hinweis: Wählen Sie als Lösungsansatz Ihr Ergebnis aus (b) und ersetzen Sie die Integrationskonstante der Differentialgleichung durch eine (noch zu bestimmende) Funktion $C(x)$. Leiten Sie dann eine Gleichung für $C'(x)$ her. (2 Punkte)

e) Lösen Sie Gl. (3) für den Fall $f(x) = 1$ und $g(x) = e^x$. Achten Sie dabei auf die Integrationskonstante. (1 Punkt)