INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 4
Abgabe 12.11.2012
Besprechung 16.11.2012

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 9: Ameisenspaziergang (5 Punkte)

Zwischen zwei Bäumen hängt ein schweres, biegeweiches Seil, das die Biegelinie $y(x) = \cosh x$ ausgebildet hat. An diesem Seil krabbelt eine Ameise von der Stelle $x = a$ bis zur Stelle $x = b$.

a) Welche Entfernung legt die Ameise zurück? (1 Punkte)

b) Wie lautet die Bahnkurve der Ameise als Funktion der Bogenlänge? (2 Punkte)

c) Zeigen Sie explizit, dass auch in diesem Beispiel die Ableitung der Bahnkurve nach der Bogenlänge zu jedem Zeitpunkt ein Einheitsvektor ist. (2 Punkte)

Aufgabe 10: Abrollkurve (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Punktes P, der im Abstand a von der Drehachse mit einem auf der Straße ($y = 0$) rollenden Rad mit Radius R fest verbunden ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Drehachse bei $x = 0$ und der Punkt P genau darunter. Die Geschwindigkeit des Radmittelpunkts sei konstant gleich $\vec{v}_M = (v, 0)$. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie: Falls $a = R$ ist, gibt es Zeitpunkte t_n, bei denen die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ des Punktes P verschwindet, die Steigung dy/dx der Bahnkurve aber unendlich ist.

Hinweis: $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$. Falls $\lim_{t\to t_n} \frac{f(t)}{g(t)}$ einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt, so ist $\lim_{t\to t_n} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to t_n} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ (Regel von L'Hôpital). (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Bahnkurve

i) für $a < R$;

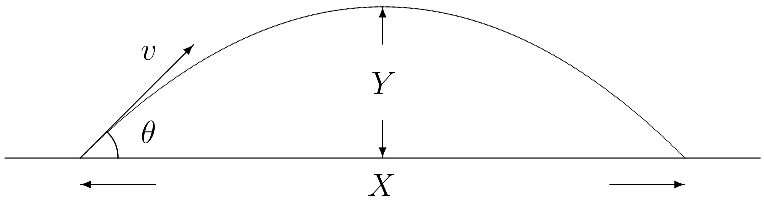
ii) für $a = R$;

iii) für $a > R$.

(2 Punkte)

Aufgabe 11: Schiefer Wurf (8 Punkte)

Eine Kanone schießt mit einem Anstellwinkel θ:



a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ der Kugel. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Kugel am Ort $\vec{r}(0) = (0, 0)$, der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}(0)| = v$ und der Anstellwinkel θ. Die Beschleunigung sei konstant $\vec{a} = (0, -g)$. (1 Punkte)

   Hinweis: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ ist vorgegeben; durch Integration erhalten Sie zunächst $\vec{v}(t)$ und dann $\vec{r}(t)$. Die jeweiligen Integrationskonstanten sind durch die Vorgabe von $\vec{v}(0)$ und $\vec{r}(0)$ festgelegt. (1 Punkte)

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt T und den Abstand X, bei dem die Kugel wieder am Boden auftrifft. (1 Punkte)

c) Berechnen Sie die Höhe Y am Scheitelpunkt der Bahn. (1 Punkte)

d) Bei welchem Winkel θ wird der Abstand X maximal, falls v und g fest vorgegeben sind?

   Hinweis: $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$ (1 Punkte)

e) Zeigen Sie: Die bis zum Zeitpunkt T zurückgelegte Bogenlänge L auf der Bahn ist gegeben durch

$$L = \frac{v^2}{g} \left[\cos^2\theta \operatorname{arsinh}(\tan\theta) + \sin\theta\right].$$

   (2 Punkte)

f) Verifizieren Sie anhand des Ausdrucks für L, dass für kleine Winkel $\theta \approx 0$ die Bogenlänge L annähernd gleich X ist, während für den Winkel $\theta = \pi/2$ gerade der Weg $L = 2Y$ zurückgelegt wird.

   Hinweis: Für $\theta \approx 0$ können Sie näherungsweise $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \theta$ und $\operatorname{arsinh}\theta = \theta$ setzen. Im Grenzfall $\theta \to \pi/2$ gilt

$$\lim_{\theta\to\pi/2} \cos^2\theta \operatorname{arsinh}(\tan\theta) = 0$$

   (warum?). (1 Punkte)