Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

Übungsblatt 5
Abgabe 19.11.2012
Besprechung 23.11.2012

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 12: Separation der Variablen (5 Punkte)

Häufig begegnet man Differentialgleichungen der Form

$$g(y)y'(x) = f(x), \tag{1}$$

die man mit der Methode der *Separation der Variablen* lösen kann.

a) Begründen Sie, warum Gl. (1) äquivalent ist zu

$$G(y) = F(x) + C$$

mit einer beliebigen Konstanten C. Dabei sind G und F Stammfunktionen zu g und f. (2 Punkte)

b) Lösen Sie Gl. (1) für den Spezialfall $g(y) = y - \bar{y}$, $f(x) = -(x - \bar{x})$, wobei $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$ sind. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass die Lösungen dieses Spezialfalls Kreise in der x-y-Ebene sind und drücken Sie die Integrationskonstante durch den Radius R des Kreises aus. (2 Punkte)

Aufgabe 13: Bahnkurve (15 Punkte)

Die Bewegung eines Massenpunktes mit $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ werde durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} \quad ,$$
$$\ddot{y} = -\omega \dot{x} \quad ,$$
$$\ddot{z} = 0 \quad ,$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ bestimmt.

a) Integrieren Sie die drei Gleichungen über die Zeit, um Differentialgleichungen für $(x(t), y(t), z(t))$ zu finden, in denen keine höheren Ableitungen als $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ vorkommen (sog. Differentialgleichungen 1. Ordnung). (2 Punkte)

b) Um die Projektion der Bahnkurve in die x-y-Ebene zu finden, suchen wir nun eine Differentialgleichung für $y(x)$: Drücken Sie dazu dy/dx durch x und y aus und lösen Sie diese Differentialgleichung. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie $|\dot{\vec{r}}(t)|$ und geben Sie den Weg an, den der Massenpunkt im Zeitintervall $[0, T]$ zurücklegt. (3 Punkte)

d) Zeichnen Sie die Bahnkurve. (Wie nennt man diese Kurve?) (1 Punkt)

e) Bestimmen Sie nun $\vec{r}(t)$. Dazu dürfen Sie aus Ihrer Kenntnis der Bahnkurve und von $|\dot{\vec{r}}(t)|$ das Ergbnis erraten und in die in a) gefundene Differentialgleichung einsetzen. Falls es mit dem Raten nicht klappt, können Sie z.B. unter Verwendung von $\dot{y} = \dot{x}dy/dx$ und des Ergebnisses aus b) zunächst $y(t)$ und dann $x(t)$ finden. Ihre Lösung sollte sechs unbestimmte Parameter haben. (3 Punkte)

f) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Massenpunkt am Ort $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ und habe die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$. Drücken Sie die Parameter Ihrer Lösung durch die Komponenten von $\vec{v}_0$ aus. (3 Punkte)