Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

Übungsblatt 6
Abgabe 26.11.2012
Besprechung 30.11.2012

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 14: Drehmatrizen (5 Punkte)

a) Welche der folgenden Matrizen sind Drehmatrizen. Begründen Sie Ihre Aussage. Bestimmen Sie für die Drehmatrizen den Drehwinkel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

(4 Punkte)

b) In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass orthogonale Transformationen längentreu und winkeltreu sind. Zeigen Sie, dass alle längentreuen linearen Transformationen automatisch winkeltreu sind. (1 Punkt)

Aufgabe 15: Determinanten (5 Punkte)

Die Determinante einer 2×2-Matrix M läßt sich mit Hilfe des zweidimensionalen Levi-Civita-Symbols ε_{ij} schreiben als

$$\det M = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij} M_{1i} M_{2j} \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass die Komponenten des Levi-Civita-Symbols ε_{ij} (für $i, j \in \{1, 2\}$) durch die Bedingungen

$$\varepsilon_{12} = 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in \{1, 2\}$$

vollständig festgelegt sind. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie

$$\sum_{k,l=1}^{2} \varepsilon_{kl} M_{ik} M_{jl} = (\det M)\varepsilon_{ij} \quad \text{für alle } i,j \in \{1,2\} \quad .$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass für beliebige 2×2-Matrizen A und B gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad .$$

Verwenden Sie dazu Ihr Ergebnis aus (b) und die Indexformel für Matrixprodukte:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{2} A_{ik} B_{kj} \quad .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 16: Dreidimensionale Drehungen (10 Punkte)

Analog zu zweidimensionalen Drehungen können Drehungen im dreidimensionalen Raum durch 3×3-Matrizen beschrieben werden:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z \\ R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z \\ R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\vec{r} \quad .$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten der Drehmatrizen $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$ und $R_z(\phi)$, die Drehungen des Koordinatensystems um die x, y bzw. z-Achse um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn, wenn man in negativer Richtung der entsprechenden Achse blickt) beschreiben. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Matrizen

$$\omega^{(1)} = \frac{d}{d\phi} R_x(\phi)\bigg|_{\phi=0} \quad , \quad \omega^{(2)} = \frac{d}{d\phi} R_y(\phi)\bigg|_{\phi=0} \quad , \quad \omega^{(3)} = \frac{d}{d\phi} R_z(\phi)\bigg|_{\phi=0}$$

indem Sie die Komponenten der Matrizen $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$ und $R_z(\phi)$ nach ϕ differenzieren. Drücken Sie die Komponenten der Matrizen $\omega^{(i)}$ durch das dreidimensionale Levi-Civita-Symbol ε_{ijk} aus. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_x(\phi_1)R_z(\phi_3)$ und $R_z(\phi_3)R_x(\phi_1)$. Was für Koordinatentransformationen werden durch die zwei Matrixprodukte beschrieben? Sind die Ergebnisse gleich? Entwickeln Sie die zwei Matrixprodukte um $\phi_1 = \phi_3 = 0$ zur ersten Ordnung in ϕ_1 und ϕ_3 und drücken Sie ihr Ergebnis durch die Matrizen $\omega^{(i)}$ aus. Vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnung $\phi_1\phi_3$. (3 Punkte)