Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

Übungsblatt 7
Abgabe 03.12.2012
Besprechung 07.12.2012

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 17: Matrix-Exponentialfunktion (10 Punkte)

Die Exponentialfunktion für Matrizen ordnet jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix $e^A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu. Sie ist, analog zur Exponentialfunktion für komplexe Zahlen, über die Exponentialreihe definiert:

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

mit $A^0 \equiv \mathbb{1}$. Die Reihe konvergiert für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jede Komponente $[e^A]_{ij}$.

a) Zweidimensionale Drehungen werden beschrieben durch Matrizen

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad .$$

Der *Generator* zweidimensionaler Drehungen ist

$$\omega = \frac{d}{d\phi} R(\phi)\Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Zeigen Sie, dass $e^{\phi\omega} = R(\phi)$ ist.
Hinweis: Zerlegen Sie die Exponentialreihe in gerade und ungerade Terme.
(4 Punkte)

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B \quad .$$

(2 Punkte)

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\phi & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie e^A, e^B und e^{A+B}. Gilt die Exponentialgleichung $e^{A+B} = e^A e^B$ auch für Matrizen? (4 Punkte)

Aufgabe 18: Drehungen um beliebige Achsen (10 Punkte)

a) Seien $\hat{n}^{(1)}, \hat{n}^{(2)}, \hat{n}^{(3)} \in \mathbb{R}^3$ drei Einheitsvektoren, die ein rechtshändiges Koordinatensystem definieren:

$$\hat{n}^{(i)} \cdot \hat{n}^{(j)} = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, n_i^{(1)} n_j^{(2)} n_k^{(3)} = 1 \quad .$$

Sei R eine Matrix, die eine Drehung um die Achse $\hat{n}^{(1)}$ um den Winkel ϕ beschreibt. Geben Sie an, wie R in der Basis der $\hat{n}^{(i)}$ wirkt, d.h. schreiben Sie

$$R\hat{n}^{(i)} = \sum_{j=1}^{3} \hat{n}^{(j)} M_{ji}$$

und bestimmen sie die Koeffizienten M_{ji}. Woher kennen Sie die Matrix M?
(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass $M = \exp(\phi\omega^{(1)})$ ist, wobei $\omega^{(i)}$ die Matrizen aus Aufgabe 16b sind. Sie dürfen sich dabei (sofern vorhanden) auf Ihre Überlegungen aus Aufgabe 17 beziehen.
(1 Punkt)

c) Sei nun N die Matrix, deren Spalten die Vektoren $\hat{n}^{(i)}$ bilden, d.h. $N_{ij} = \hat{n}_i^{(j)}$. Zeigen Sie, dass N orthogonal und $\det N = 1$ ist. (2 Punkte)

d) Zeigen Sie $R = NMN^{\mathsf{T}}$. Verwenden Sie dabei Ihre Erkenntnisse aus Aufgabenteil (a).
(2 Punkte)

e) Zeigen Sie

$$N\omega^{(i)}N^{\mathsf{T}} = \sum_{j=1}^{3} \omega^{(j)} N_{ji} \quad .$$

Dazu dürfen Sie die Verallgemeinerung Ihres Ergebnisses aus Aufgabe 15b für drei Dimensionen benutzen:

$$\sum_{p,q,r=1}^{3} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr} = \det(A)\varepsilon_{ijk} \quad .$$

(3 Punkte)

f) Zeigen Sie

$$R = \exp(\textstyle\sum_{i=1}^{3} \phi_i \omega^{(i)}) \equiv \exp(\vec{\phi} \cdot \vec{\omega}) \quad ,$$

wobei $\vec{\phi} = \phi\hat{n}^{(1)}$ der *Drehvektor* ist.
Hinweis: Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe 17b. (1 Punkt)