INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 8
Abgabe 10.12.2012
Besprechung 14.12.2012

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 19: Kontraktionen von Indizes (10 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\varepsilon_{jkl} \quad , \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} \quad , \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{ji} \quad .$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie durch geschicktes Argumentieren, dass für $j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3 \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j_1j_2j_3}\varepsilon_{k_1k_2k_3} = \quad & \delta_{j_1k_1}\delta_{j_2k_2}\delta_{j_3k_3} + \delta_{j_1k_2}\delta_{j_2k_3}\delta_{j_3k_1} + \delta_{j_1k_3}\delta_{j_2k_1}\delta_{j_3k_2} \\ & - \delta_{j_1k_2}\delta_{j_2k_1}\delta_{j_3k_3} - \delta_{j_1k_3}\delta_{j_2k_2}\delta_{j_3k_1} - \delta_{j_1k_1}\delta_{j_2k_3}\delta_{j_3k_2} \quad . \end{aligned}$$

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie

$$\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{j_1j_2l}\varepsilon_{k_1k_2l} \quad , \quad \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{j_1lm}\varepsilon_{k_1lm} \quad , \quad \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{lmn} \quad .$$

(3 Punkte)

d) Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$ kann in Komponentenform als $v_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}a_jb_k$ geschrieben werden. Berechnen Sie

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad , \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \quad .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 20: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (10 Punkte)

Jede beliebige Drehung kann als Produkt aufeinanderfolgender Drehungen geschrieben werden. Als Standard wählt man eine Drehung um die z-Achse mit dem Winkel α, gefolgt von einer Drehung um die neue x-Achse mit dem Winkel β und abgeschlossen mit einer Drehung um die neue z-Achse mit dem Winkel γ. Die Winkel α, β und γ werden *Eulersche Winkel* genannt. Die assoziierte Drehmatrix ist

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Eine andere Beschreibung einer beliebigen Drehung haben Sie in Aufgabe 18 kennengelernt. Eine Drehung kann durch einen Vektor $\vec{\phi}$ mit $\phi \equiv |\vec{\phi}| = (\vec{\phi}\cdot\vec{\phi})^{1/2} \leq \pi$ beschrieben werden. Die assoziierte Drehmatrix ist $R'(\vec{\phi}) = \exp(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})$ mit $\vec{\phi}\cdot\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \phi_i \omega^{(i)}$ und Matrizen $\omega^{(i)}$ mit $\omega^{(i)}_{jk} = \varepsilon_{ijk}$.

a) Bestimmen Sie die Komponenten der Matrix $R(\alpha,\beta,0)$. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie an jeweils einem Beispiel: Die Zeilenvektoren von $R(\alpha,\beta,0)$ haben die Länge 1 und stehen paarweise orthogonal aufeinander. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie

$$(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^2 = \vec{\phi}\vec{\phi}^{\mathsf{T}} - \phi^2 \mathbb{1} \quad , \quad (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^3 = -\phi^2(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega}) \quad , \quad (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^4 = -\phi^2(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^2 \quad .$$

Dabei bezeichnet $\vec{\phi}\vec{\phi}^{\mathsf{T}}$ die Matrix mit $[\vec{\phi}\vec{\phi}^{\mathsf{T}}]_{ij} = \phi_i\phi_j$.
Hinweis: Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 19. (3 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^{2n+1} = (-1)^n \phi^{2n}(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega}) \quad , \quad (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^{2n+2} = (-1)^n \phi^{2n}(\vec{\phi}\vec{\phi}^{\mathsf{T}} - \phi^2\mathbb{1}) \quad .$$

(2 Punkte)

e) Zeigen Sie

$$R'(\vec{\phi}) = \exp(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega}) = \mathbb{1}\cos\phi + \vec{\phi}\vec{\phi}^{\mathsf{T}}\frac{1-\cos\phi}{\phi^2} + (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})\frac{\sin\phi}{\phi}$$

indem Sie die Exponentialreihe geeignet aufteilen. (2 Punkte)