

PROF. U. NIERSTE  
 DR. M. WIEBUSCH

**Übungsblatt 10 (Probeklausur)**  
**Abgabe 07.01.2013**  
**Besprechung 11.01.2013**

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr: \_\_\_\_\_ Gruppe: \_\_\_\_\_

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

**Aufgabe 23: Drehungen**

(5 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

- a) Zeigen Sie, dass  $R$  eine Drehmatrix ist. (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Drehachse der Drehung  $R$ . (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie den Betrag des Drehwinkels der Drehung  $R$ . (1 Punkt)

**Aufgabe 24: Rotierendes Bezugssystem**

(5 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in einem Inertialsystem  $\mathcal{S}$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v} = v\vec{e}_1$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befinde es sich bei  $\vec{r}_0 = b\vec{e}_2$ . Ein Beobachter befinde sich in einem Bezugssystem  $\mathcal{S}'$ , das gegenüber  $\mathcal{S}$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im mathematisch positiven Sinn um die  $\vec{e}_3$ -Achse rotiert. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien die Koordinatenachsen  $\vec{e}'_i(t)$  des Systems  $\mathcal{S}'$  identisch zu den Koordinatenachsen des Systems  $\mathcal{S}$ .

- a) Geben Sie die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  des Teilchens im Inertialsystem  $\mathcal{S}$  an. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten  $r'_i(t) = \vec{e}'_i(t) \cdot \vec{r}(t)$  des Teilchens im rotierenden System  $\mathcal{S}'$ . (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die Komponenten  $\dot{r}'_i(t)$  und  $\ddot{r}'_i(t)$  der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens im rotierenden System  $\mathcal{S}'$ . (2 Punkte)

d) Sei  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$ . Berechnen Sie die Komponenten des Vektors

$$\vec{a}'(t) = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'(t) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'(t)) \quad .$$

(1 Punkt)

### Aufgabe 25: Indexkontraktion und Kreuzprodukt

(5 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Indexkontraktionen (d.h. vereinfachen Sie die Ausdrücke, so dass die Summenzeichen verschwinden).

$$\sum_{l,m=1}^3 \delta_{jl} \delta_{im} \varepsilon_{klm} \quad , \quad \sum_{j,k,l=1}^3 \delta_{jl} \delta_{lk} \varepsilon_{ijk} \quad , \quad \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lkm} \quad .$$

(3 Punkte)

b) Vereinfachen Sie das folgende Kreuzprodukt (d.h. formen Sie den Ausdruck so um, dass er nur noch ein Kreuzprodukt enthält).

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] \times \vec{c}$$

(2 Punkte)

### Aufgabe 26: Länge einer Bahnkurve

(5 Punkte)

Die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  eines Teilchens sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{e}_1 + R \sin(\omega t) \vec{e}_2 - \frac{g}{2} t^2 \vec{e}_3 \quad .$$

Dabei sind  $R, g, \omega > 0$  konstant.

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int du \sqrt{1 + u^2} \quad .$$

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Strecke, die das Teilchen von  $t = 0$  bis zu einem Zeitpunkt  $t = T$  zurückgelegt hat.

(3 Punkte)