Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 12
Abgabe 21.01.2013
Besprechung 25.01.2013

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 28: Zweidimensionales Pendel (10 Punkte)

Ein Pendel bestehe aus einem masselosen Faden der Länge l, dessen erster Endpunkt am Koordinatenursprung befestigt ist und an dessen zweitem Endpunkt ein Gewicht der Masse m befestigt ist. In Richtung der negativen z-Achse wirke die Erdbescheunigung g.

a) Das Pendel bewege sich in der xz-Ebene. Der Ort $\vec{r}$ des Massenpunktes ist dann durch die x-Koordinate x vollständig festgelegt. Leiten Sie aus der Newton'schen Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung für x her.
Hinweis: Die Komponente der Gewichtskraft in Richtung des Fadens wird durch die Fadenspannung kompensiert. (1 Punkt)

b) Betrachten Sie nun den Fall kleiner Auslenkungen. Lösen Sie dazu die Differentialgleichung aus (a) nach $\ddot{x}$ auf und entwickeln Sie die rechte Seite der Gleichung zur führenden nicht-verschwindenden Ordnung in x/l. (1 Punkt)

c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus (b) zunächst für komplexwertige Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Benutzen Sie dazu den Ansatz $x(t) = ae^{i\omega t}$ mit $a, \omega \in \mathbb{C}$. Für welche Werte von a und ω löst dieser Ansatz die Differentialgleichung? (1 Punkt)

d) Seien nun $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung aus (b). Zeigen Sie, dass dann für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ auch die Linearkombination $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ eine Lösung ist. Geben Sie die allgemeinste Linearkombination ihrer in (c) gefundenen Lösungen an. (1 Punkt)

e) Bestimmen Sie diejenige Lösung x, die die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass für $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung folgende Form hat:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) \tag{1}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ und $\omega_0 > 0$. Drücken Sie ω_0 durch m, g und l aus. Drücken Sie A und B durch x_0, v_0 und ω_0 aus. (1 Punkt)

f) Zeigen Sie, dass sich die Lösung (1) auch scheiben lässt als

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta)$$

mit $C, \delta \in \mathbb{R}$. Drücken Sie C und δ durch A und B aus. (1 Punkt)

g) Addieren Sie nun zur rechten Seite der Differentialgleichung aus (b) einen *Reibungsterm* $-\lambda\dot{x}$ mit $\lambda > 0$. Wiederholen Sie (c) und (d) für die neue Differentialgleichung. (2 Punkte)

h) Bestimmen Sie für die Differentialgleichung mit Reibungsterm diejenige Lösung x, die die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt. Skizzieren Sie die Lösung für $x_0 \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von λ zeigt die Lösung oszillierendes Verhalten? (2 Punkte)

Aufgabe 29: Foucaultsches Pendel (10 Punkte)

Betrachten Sie erneut das Pendel aus Aufgabe 28, das nun aber auch in y-Richtung schwingen kann. Die Position der Pendelmasse ist nun durch die x-Koordinate x und die y-Koordinate y vollständig festgelegt.

a) Leiten Sie analog zu Aufgabe 28a aus der Newtonschen Bewegungsgleichung Differentialgleichungen für x und y her. (2 Punkte)

b) Entwickeln Sie die Differentialgleichungen aus (a) analog zu Aufgabe 28b für kleine Auslenkungen $x, y \ll l$. (1 Punkt)

c) Kombinieren Sie die Differentialgleichungen aus (b), indem Sie die komplexe Variable $\xi = x + iy$ definieren. Geben Sie eine Differentialgleichung für ξ und deren algemeinste Lösung an. (1 Punkt)

d) Betrachten Sie nun den Einfluss der Corioliskraft auf das Pendel. Der Rotationsvektor der Erde sei $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^\mathsf{T}$. Geben Sie Differentialgleichungen für x und y an, die für kleine Auslenkungen den führenden Beitrag der Corioliskraft berücksichtigen.
Hinweis: Da $|\vec{\Omega}|$ klein ist und wir nur an kleinen Auslenkungen interessiert sind, dürfen Sie Terme der Ordnung x^2/l^2 und $(|\vec{\Omega}|\dot{x}/g) \cdot (x/l)$ (sowie entsprechende Terme mit x ersetzt durch y oder $\dot{x}$ ersetzt durch $\dot{y}$) vernachlässigen. Wenn Sie dies tun sollte zu jeder Gleichung nur ein Term hinzukommen. (3 Punkte)

e) Geben Sie eine Differentialgleichung für ξ an, die den führenden Beitrag der Corioliskraft berücksichtigt. Lösen Sie diese Gleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $y(0) = \dot{y}(0) = \dot{x}(0) = 0$. Wann schwingt das Pendel zum zweiten Mal in der xz-Ebene? (3 Punkte)