Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 30: Wegintegrale (10 Punkte)

Betrachten Sie die Kraftfelder

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = a\vec{e}_3 \times \vec{r} \quad , \quad \vec{F}_2(\vec{r}) = b\vec{r}/|\vec{r}|^2$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $[a] = \mathrm{kg/s^2}$ und $[b] = \mathrm{kg\,m^2/s^2}$. Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\int_C \vec{F}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

mit $i = 1, 2$, wobei der Weg C

a) von $\vec{r}_1 = (\rho, 0, 0)^\mathsf{T}$ nach $\vec{r}_2 = (0, \rho, 0)^\mathsf{T}$ entlang eines Kreisbogens, der in der xy-Ebene mit Radius ρ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ gegen den Uhrzeigersinn verläuft. (4 Punkte)

b) von $\vec{r}_1 = (\rho, 0, 0)^\mathsf{T}$ nach $\vec{r}_2 = (0, \rho, 0)^\mathsf{T}$ entlang eines Kreisbogens, der in der xy-Ebene mit Radius ρ und Mittelpunkt $(\rho, \rho, 0)$ im Uhrzeigersinn verläuft. (4 Punkte)

c) Welche der Kraftfelder $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ sind konservativ? Geben Sie für die konservativen Felder ein Potential an. (2 Punkte)

Aufgabe 31: Vielteilchensysteme (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System aus n Teilchen mit Massen m_i und Ortsvektoren $\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Auf das i-te Teilchen wirke die *äußere Kraft* $\vec{K}_i \equiv \vec{K}_i(t)$. Zusätzlich wirken zwischen den Teilchen *innere* konservative zeitunabhängige Zentralkräfte $\vec{F}_{ij}$. Genauer sei $\vec{F}_{ij} \equiv \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ die Kraft, die Teilchen j auf Teilchen i ausübt. Das zu der Kraft $\vec{F}_{ij}(\vec{r})$ gehörige Potential sei $V_{ij}(|\vec{r}|)$, d.h.

$$(\vec{F}_{ij})_k(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_k} V_{ij}(|\vec{r}|) \quad ,$$

wobei die $V_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige reellwertige Funktionen einer Variablen sind.

a) Zeigen Sie

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -V'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad ,$$

wobei $V'_{ij}(r) = dV_{ij}(r)/dr$ ist. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass das dritte Newtonsche Axiom erfüllt ist, wenn $V_{ii}(r) = 0$ und $V_{ij}(r) = V_{ji}(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ gilt. (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie die Gesamtkraft $\vec{F}_i$, die auf das i-te Teilchen wirkt. Geben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für das i-te Teilchen an. (1 Punkt)

d) Sei von nun an das dritte Newtonsche Axiom erfüllt. Der Schwerpunkt $\vec{R}$ des Systems ist definiert durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \quad \text{mit} \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad .$$

Geben Sie eine Bewegungsgleichung für $\vec{R}$ an. Zeigen Sie, dass die Bewegung von $\vec{R}$ nicht von den inneren Kräften abhängt. (1 Punkt)

e) Der Gesamtimpuls $\vec{P}$ ist definiert durch

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r}}_i \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\dot{\vec{P}}$ nich von den inneren Kräften abhängt und drücken Sie $\dot{\vec{P}}$ durch die $\vec{K}_i$, $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$ aus. Was gilt im Fall verschwindender äußerer Kräfte? (2 Punkte)

f) Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ ist definiert durch

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\dot{\vec{L}}$ nicht von den inneren Kräften abhängt und drücken Sie $\dot{\vec{L}}$ durch die $\vec{K}_i$, $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$ aus. Was gilt im Fall verschwindender äußerer Kräfte? (2 Punkte)

g) Die Gesamtenergie E ist definiert durch

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\vec{r}}_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad .$$

Drücken Sie $\dot{E}$ durch die $\vec{K}_i$, $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$ aus. Was gilt im Fall verschwindender äußerer Kräfte? (2 Punkte)