Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

Übungsblatt 14
Abgabe 04.02.2013
Besprechung 08.02.2013

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie sich im Studierendenportal für die Vorleistungen anmelden. Die Anmeldung ist nun freigeschaltet. Bitte beachten Sie die Hinweise auf `http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~wiebusch/KlassTheoPhysI-WS1213/`

Aufgabe 32: Zweikörperproblem (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System aus zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 und Ortsvektoren $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_2(t)$. Zwischen den Teilchen wirke eine konservative Zentralkraft

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{21}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad ,$$

wobei $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $\nabla_{1k} = \partial/(\partial r_{1k})$ ist. (Wie in Aufgabe 31 ist $\vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ die Kraft, die Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausübt.) Es wirken keine äußeren Kräfte.

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ an. (1 Punkt)

b) Definieren Sie den Schwerpunktsvektor $\vec{R}$ und den Relativvektor $\vec{r}$ durch

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad .$$

Invertieren Sie diese Gleichungen, d.h. drücken Sie $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ durch $\vec{R}$ und $\vec{r}$ aus. (2 Punkte)

c) Leiten Sie aus den Differentialgleichungen aus (a) Differentialgleichungen für $\vec{R}$ und $\vec{r}$ her. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für $\vec{r}$ der Bewegungsgleichung *eines* Teilchens im Potential $V(|\vec{r}|)$ mit der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

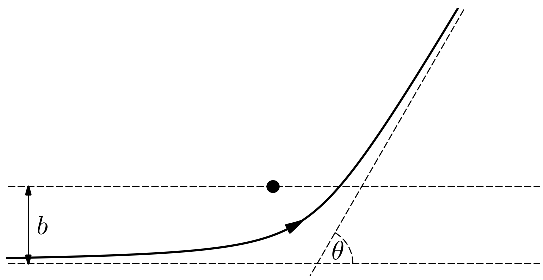
entspricht. (2 Punkte)

d) Drücken Sie die Gesamtenergie E, den Gesamtimpuls $\vec{P}$ und den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ des Systems (siehe Aufgabe 31) durch μ, $M \equiv m_1 + m_2$, $\vec{R}$ und $\vec{r}$ (und deren Ableitungen) aus. Werten Sie Ihre Ausdrücke auch für den Spezialfall $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = 0$ aus. (4 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass für $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = 0$ der Vektor $\vec{r}$ stets in einer (zeitlich festen) Ebene liegt. (1 Punkt)

Aufgabe 33: Rutherford-Streuung (10 Punkte)

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens mit Masse m und Ortsvektor $\vec{r}$ im Potential $V(\vec{r}) = -\alpha/|\vec{r}|$ mit $\alpha > 0$. Das Teilchen befinde sich anfangs bei $\vec{r}_0 = (-\infty, -b, 0)^{\mathsf{T}}$ und habe eine Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_1$. Dabei seien $b, v > 0$.



a) Bestimmen Sie die Energie E und den Drehimpuls $\vec{L}$ des Teilchens. In welcher Ebene bewegt sich das Teilchen? (2 Punkte)

b) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Bahnkurve des Teilchens in Polarkoordinaten r, ϕ bestimmt ist durch die Gleichung

$$r = \frac{1}{C(1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi'))} \quad \text{mit} \quad C = \frac{m\alpha}{|\vec{L}|^2} \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E|\vec{L}|^2}{m\alpha^2}} \quad .$$

Drücken Sie für die oben beschriebene Situation C und ε durch m, α, v und b aus. Bestimmen Sie auch den *Streuwinkel* θ aus der Skizze und drücken Sie ihn durch m, α, v und b aus. (4 Punkte)

c) Wir schießen nun eine große Anzahl Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_1$ auf das Potential V. Die y- und z-Koordinaten dieser Teilchen seien gleichmäßig über eine große Fläche verteilt. Es sei n die Anzahl der einfallenden Teilchen pro Fläche senkrecht zur Flugrichtung. Desweiteren sei $dN(\theta)$ die Anzahl der Teilchen, deren Streuwinkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt ($d\theta$ ist infinitesimal). Wir definieren den *differentiellen Wirkungsquerschnitt* $d\sigma(\theta) = dN(\theta)/n$. Berechnen Sie $d\sigma/d\theta$. (4 Punkte)