

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 2

Dr. P. P. Orth

Abgabe und Besprechung 08.11.2013

1. Wegintegrale

(10 + 10 + 20 + 10 = 50 Punkte)

- (a) Eine Parametrisierung des direkten Weges vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$ zum Punkt $\mathbf{r}_1 = (a, b, c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ lautet

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = ta\mathbf{e}_x + tb\mathbf{e}_y + tc\mathbf{e}_z = t(a, b, c) \quad (1)$$

mit $t \in [0, 1]$. Mit $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}_1$ lautet die Bogenlänge

$$s = \int_0^1 dt \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2)$$

- (b) Eine geeignete Parametrisierung des Halbkreises um den Ursprung mit Radius R lautet

$$\mathbf{r}(t) = R(\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \quad (3)$$

mit $t \in [0, 1]$. Wir finden $\dot{\mathbf{r}}(t) = \pi R(-\sin(\pi t), \cos(\pi t))$ und daher lautet die Bogenlänge

$$s = \int_0^1 dt |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \int_0^1 dt \pi R \sqrt{\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)} = \pi R. \quad (4)$$

- (c) Für den Weg i) vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ zum Punkt $\mathbf{r}_1 = (1, 1)$ entlang der Kurve $y(x) = x^2$ wählen wir die Parametrisierung

$$\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{e}_x + t^2\mathbf{e}_y. \quad (5)$$

mit $t \in [0, 1]$. Da $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{e}_x + 2t\mathbf{e}_y$ lautet das Wegintegral über das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^2\mathbf{e}_x + x^2\mathbf{e}_y$

$$I_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}}^{(i)} = \int_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_1(t) \cdot \mathbf{F}[x(t), y(t)] = \int_0^1 dt (2t^5 + 2t^3) = \frac{5}{6}. \quad (6)$$

Für den Weg ii) wählen wir die Parametrisierung

$$\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y \quad (7)$$

mit $t \in [0, 1]$. Da $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$ finden wir für das Wegintegral nun

$$I_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}}^{(ii)} = \int_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_2(t) \cdot \mathbf{F}[x(t), y(t)] = \int_0^1 dt (2t^3 + t^2) = \frac{5}{6}. \quad (8)$$

Beachte allerdings, dass das Wegintegral von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_1$ über das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y)$ nicht unabhängig vom Weg ist. Entlang des Weges iii) $y(x) = \sqrt{x}$ zum Beispiel finden wir

$$I_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}}^{(iii)} = \int_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_3(t) \cdot \mathbf{F}[x(t), y(t)] = \int_0^1 dt (4t^5 + t^4) = \frac{13}{15}. \quad (9)$$

- (d) Eine geeignete Parametrisierung eines Kreises mit Radius $R = 1$ um den Ursprung lautet

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{e}_x + \sin(t)\mathbf{e}_y \quad (10)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$. Wir finden damit $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin(t)\mathbf{e}_x + \cos(t)\mathbf{e}_y$ und für das Wegintegral über $\mathbf{F}$

$$I_C = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} dt [-2\cos(t)\sin^3(t) + \cos^3(t)]. \quad (11)$$

Mit dem Symbol $\oint_C d\mathbf{r}$ bezeichnet man Wegintegrale entlang geschlossener Wege für die Anfangs- und Endpunkt identisch sind. Um das erste der beiden Integrale zu lösen, substituieren wir $y = \sin(t)$ und erhalten damit

$$\int_0^{2\pi} dt \cos(t) \sin^3(t) = \left. \frac{\sin^4(t)}{4} \right|_0^{2\pi} = 0. \quad (12)$$

Man kann auch zeigen, dass dieses Integral verschwindet indem man durch die Substitution $t' = t - \pi$ das Integrationsintervall zu $[-\pi, \pi]$ verschiebt. Der Integrand ist unverändert da $\cos(t' + \pi) = -\cos(t')$ und $\sin^3(t' + \pi) = -\sin^3(t')$. Das Integral verschwindet nun, da der Integrand $f(t') = \cos(t')\sin^3(t')$ ungerade ist, d.h. $f(-t') = -f(t')$.

Das zweite Integral kann man integrieren, indem man benutzt dass $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ und erneut substituiert $y = \sin(t)$. Damit findet man

$$\int_0^{2\pi} dt \cos^3(t) = \sin(t) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3} \sin^3(t) \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (13)$$

Insgesamt finden wir für das Wegintegral in Gl. (11) also

$$I_C = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (14)$$

Beachten Sie dass selbst für wegabhängige Vektorfelder wie hier das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y)$ das Integral entlang *bestimmter* geschlossener Wege verschwinden kann. Offensichtlich ist das nicht der Fall für alle geschlossenen Wege, zum Beispiel für einen Weg vom Ursprung zum Punkt $\mathbf{r}_1$ und zurück wobei der Hinweg entlang des Pfades i) und der Rückweg entlang des Pfades iii) erfolge.

2. Polarkoordinaten

(10 + 10 + 10 + 10 = 40 Punkte)

- (a) Da $\mathbf{r} = (x, y)$ lauten die Basisvektoren des Polarkoordinatensystems aufgrund der Transformationsregeln $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y \quad (15)$$

sowie

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y. \quad (16)$$

- (b) Der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ lautet in der Polarkoordinatenbasis

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r, \quad (17)$$

wobei $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ den Abstand der Bahnkurve zum Ursprung bezeichnet (Länge des Ortsvektors).

- (c) Für die Geschwindigkeit findet man

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad (18)$$

wobei wir verwendet haben dass $\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial r} = 0$ und $\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi} = \mathbf{e}_\varphi$.

- (d) Für die Beschleunigung erhalten wir

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} \quad (19)$$

$$= \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}^2(-\mathbf{e}_r) \quad (20)$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi. \quad (21)$$

3. Bahnkurven

(10 + 5 + 10 + 10 + 5 = 40 Punkte)

Mögliche Beispiele für Bahnkurven für die gilt:

- (a)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (22)$$

beschreibt eine Bahnkurve mit konstantem Radius, z.B. eine Kreisbewegung

$$\mathbf{r}(t) = R[\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y]. \quad (23)$$

- (b) $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$, siehe a).

- (c)

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (24)$$

beschreibt eine Bahnkurve für die die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ (anti-)parallel zu $\mathbf{r}(t)$ steht. Dies ist der Fall zum Beispiel bei einer linearen Bewegung wie

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{e}_x. \quad (25)$$

- (d)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (26)$$

beschreibt eine Bahnkurve für die die Beschleunigung (anti-)parallel zu $\mathbf{r}$ steht. Dies ist der Fall zum Beispiel bei einer linearen Bewegung

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{e}_x. \quad (27)$$

Dies ist auch der Fall bei einer Kreisbewegung

$$\mathbf{r}(t) = R[\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y] \quad (28)$$

da hier gilt dass

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t). \quad (29)$$

Die Zentripetalbeschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ zeigt zum Mittelpunkt der Kreisbewegung (Ursprung) und hält das Teilchen auf der Kreisbahn. Ganz allgemein gilt $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ für die sogenannten Keplerbahnen einer Masse in einem Zentralkraftpotential, d.h. elliptische Bahnen, Kreisbahnen, Hyperbelbahnen und Parabelbahnen.

(e) $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, siehe d).

4. Dimensionale Analyse

(15 + 15 = 30 Punkte)

Wir bezeichnen die Dimension einer physikalischen Größe mit: Masse m , $[m] = [M]$, Länge x , $[x] = [L]$, Geschwindigkeit v , $[v] = [L]/[T]$, Winkelgeschwindigkeit ω , $[\omega] = 1/[T]$.

(a) Die Dimension einer Beschleunigung a lautet $[a] = [L]/[T]^2$. In unserem Fall stellen wir also die Gleichung auf

$$\frac{[L]}{[T]^2} = \frac{[L]^x}{[T]^x} [M]^y [L]^z. \quad (30)$$

Daraus folgt offensichtlich $y = 0$ (keine Abhängigkeit von der Masse), sowie $x = 2$. Dann folgt aus $x + z = 1$ dass $z = -1$. Die Zentripetalbeschleunigung eines Teilchens mit Masse m und Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r lautet also

$$a = C \frac{v^2}{r}. \quad (31)$$

Hier bezeichnet C eine dimensionslose Konstante, die man nicht aus den Betrachtungen der Dimensionsanalyse bestimmen kann.

(b) Die Dimension einer Beschleunigung lautet $[a] = [L]/[T]^2$. Mit den gegebenen physikalischen Größen wählen wir den Ansatz

$$a = C \omega^x v^y r^z. \quad (32)$$

Betrachten wir die Dimension, so erhalten wir

$$\frac{[L]}{[T]^2} = \frac{1}{[T]^x} \frac{[L]^y}{[T]^y} [L]^z \quad (33)$$

und somit die Gleichungen $y + z = 1$ und $x + y = 2$.

Für die Beschleunigung a_1 , die am Ursprung verschwindet erhält man $z > 0$. Daraus folgt $y = 1 - z$ und $x = 1 + z$. Somit erhalten wir eine z -abhängige Lösung: $a_1 = C_1 \omega^{1+z} v^{1-z} r^z$. Fordern wir noch zusätzlich dass die Beschleunigung nicht verschwindet für $v = 0$, so erhalten wir eine eindeutige Lösung der Form, $z = 1$, $x = 2$, $y = 0$, die (Zentrifugal-) Beschleunigung

$$a_1 = C_1 \omega^2 r \quad (34)$$

Verwenden wir noch dass der Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}_1$ in der Ebene des Karusells liegen wird und dass $\boldsymbol{\omega}$ entlang der Rotationsachse zeigt, so erhalten wir das Gesetz

$$\mathbf{a}_1 = C_1 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (35)$$

Für die Beschleunigung a_2 , die nicht am Ursprung verschwindet (und dort auch nicht divergiert) erhalten wir sofort eine eindeutige Lösung mit $z = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, die (Coriolis-) Beschleunigung

$$a_2 = C_2 \omega v . \quad (36)$$

Verwenden wir auch hier dass der Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}_2$ in der Ebene des Karusells liegen wird, so erhalten wir das Gesetz

$$\mathbf{a}_2 = C_2 \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} . \quad (37)$$

5. Gaußintegrale

(10 + 10 + 10 + 10 = 40 Punkte)

(a) Um das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2-y^2} \quad (38)$$

zu berechnen machen wir zuerst eine Substitution zu Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$. Die Funktionaldeterminante (im englischen als *Jacobian* bezeichnet), die bei der Transformation auftritt, lautet

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} \right| = r. \quad (39)$$

Das Integral nimmt die Form

$$I = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi r e^{-r^2} \quad (40)$$

an. Wir können die Integration über den Winkel φ einfach ausführen, da der Integrand nicht von φ abhängt. Für die Integration über r verwenden wir, dass man den Integranden als Ableitung schreiben kann

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{d}{dr} e^{-r^2}\right) = -\pi \left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi. \quad (41)$$

(b) Da $I_0 = \sqrt{I} = \sqrt{\pi}$.

(c) Für $\lambda \leq 0$ divergiert das Integral. Für $\lambda > 0$ erhält man mit der Substitution $y = \sqrt{\lambda}x$ direkt

$$I_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \quad (42)$$

(d) Wir sehen sofort dass

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-x^2} = 0 \quad (43)$$

da der Integrand eine ungerade Funktion ist, d.h. $f(x) = x e^{-x^2}$ erfüllt $f(-x) = -f(x)$. Das Integral über ganz $\mathbb{R}$ verschwindet daher.

Zur Berechnung von I_2 verwenden wir, dass wir einen Faktor x^2 im Integranden erzeugen können, indem wir $I_0(\lambda)$ nach λ ableiten

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-\frac{d}{d\lambda}\right) e^{-\lambda x^2} \Big|_{\lambda=1}. \quad (44)$$

Nehmen wir an, dass wir Ableitung nach λ und Integration über x vertauschen können (das setzt die absolute Konvergenz des Integrals voraus), so erhalten wir

$$I_2 = \left(-\frac{d}{d\lambda}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} \Big|_{\lambda=1} = \left(-\frac{d}{d\lambda}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \Big|_{\lambda=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (45)$$