

**1. Achterbahn**

(15 Punkte)

Damit der Wagen gerade nicht aus der Spur fällt, muß am höchsten Punkt im Looping $y = 2R$ gelten, daß $v^2(2R)/R = g$. Denn dann wird die Zentripetalbeschleunigung, die auf den Wagen wirken muss um ihn in der Spur zu halten, gerade von der Beschleunigung im Graviationsfeld erbracht. Bei jeder schnelleren Geschwindigkeit gibt es auch eine Normalkraft der Schienen, die auf den Wagen wirken und bei jeder kleineren Geschwindigkeit wird der Wagen aus den Schienen fallen.

Die Geschwindigkeit eines Wagens in der Höhe $y = 2R$, der von der Höhe $y = h$ in Ruhe gestartet ist, errechnet sich aus dem Energieerhaltungssatz zu

$$mg(h - 2R) = \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - 2R)}. \quad (1)$$

Aus der obigen Bedingung $v^2(2R)/R = g$ finden wir für die minimale Höhe h nun

$$\frac{2g(h - 2R)}{R} = g \Leftrightarrow h = \frac{5}{2}R. \quad (2)$$

2. Rettungsschwimmer

(25 Punkte)

Der Rettungsschwimmer wird sich offensichtlich auf zwei Geraden an Land und im Wasser bewegen, um den in Not geratenen möglichst schnell zu erreichen, denn eine Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten im euklidischen Raum. In anderen Worten, der Rettungsschwimmer bewegt sich auf geodätischen Linien. Wie in der Zeichnung parametrisieren wir die Geraden mit der positiven reellen Variablen x . An Land bewegt er sich also vom Punkt $(0, -d_1)$ zum Punkt $(x, 0)$ und im Wasser vom Punkt $(x, 0)$ zum Punkt (L, d_2) . Man kann die Linien auch durch zwei (Brechungs-)winkel an der Grenzfläche zwischen Land und Wasser beschreiben als

$$\tan \theta_1 = \frac{x}{d_1} \quad (3)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{L - x}{d_2} \Leftrightarrow \tan \theta_2 = \frac{L}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \tan \theta_1. \quad (4)$$

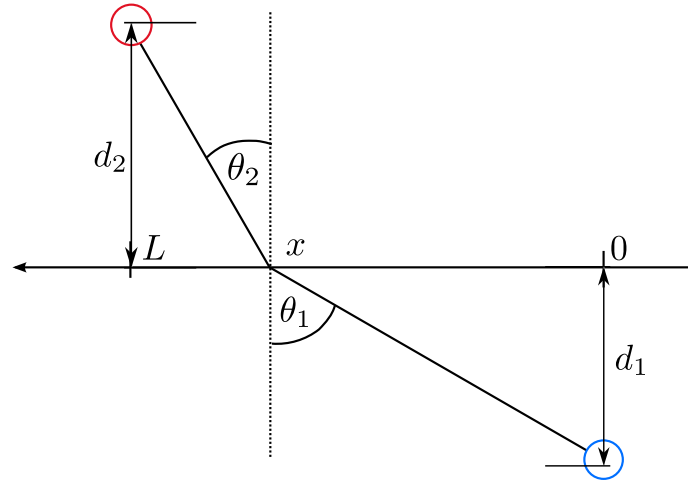


Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe 3.2. Der blaue Kreis bezeichnet den Startpunkt des Rettungsschwimmers und der rote Kreis den in Not geratenen Schwimmer.

Die Gesamtzeit $T(x)$, die der Rettungsschwimmer benötigt lautet

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + d_2^2}}{v_2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow T(\theta_1) = \frac{d_1}{v_1} \sqrt{1 + \tan^2 \theta_1} + \frac{d_2}{v_2} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \tan \theta_1\right)^2}, \quad (6)$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Variable θ_1 anstatt x verwendet haben.

Um die minimale Zeit zu bestimmen, berechnen wir

$$\frac{d}{d\theta_1} T(\theta_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{d_1}{v_1} \frac{\tan \theta_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_1}} - \frac{d_1}{v_2} \frac{\frac{L}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \tan \theta_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \tan \theta_1\right)^2}} = 0 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_1}{v_1} \frac{\tan \theta_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_1}} = \frac{d_1}{v_2} \frac{\tan \theta_2}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_2}} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}. \quad (9)$$

Dieses Verhältnis zwischen Einfall- und Ausfallswinkel (des Rettungsschwimmers) an der Wasser-Land Grenzfläche wird in der Optik als Snell's Gesetz bezeichnet. Dort folgt es aus dem Fermat'schen Prinzip nach dem ein Lichtstrahl dem Weg folgt, auf dem seine Laufzeit minimal ist. Ausgedrückt in unserer ursprünglichen Variable x lautet die Beziehung

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{L-x} \frac{\sqrt{(L-x)^2 + d_2^2}}{\sqrt{d_1^2 + x^2}}. \quad (10)$$

3. Geometrische Summe

(15 Punkte)

Zur Berechnung von $S_N = \sum_{\nu=0}^{N-1} ar^\nu$ betrachten wir

$$S_N - rS_N = a \left(\sum_{\nu=0}^{N-1} r^\nu - \sum_{\nu=0}^{N-1} r^{\nu+1} \right) = a \left(1 + \sum_{\nu=1}^{N-1} r^\nu - \sum_{\nu=1}^{N-1} r^\nu - r^N \right) \quad (11)$$

$$= a(1 - r^N), \quad (12)$$

wobei wir den (Dummy)-Index ν in der zweiten Summe verschoben haben. Auflösen nach S_N ergibt schliesslich

$$S_N = \frac{a(1 - r^N)}{1 - r}. \quad (13)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ ist diese Reihe (= Folge der endlichen Summen S_n) also nur dann konvergent wenn $|r| < 1$, und wir erhalten die Formel der geometrischen Reihe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = a \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} = \frac{a}{1 - r}. \quad (14)$$

4. Olympische Arbeit

(20 Punkte)

Die Arbeit die von den Olympionikinnen verrichtet wurde entspricht der kinetischen Energie des Wurfgeschosses am Anfang der Trajektorie. Um die anfängliche Geschwindigkeit zu bestimmen verwenden wir, dass zum Zeitpunkt t_0 des Aufpralls am Zielort gilt

$$x(t_0) = L \quad (15)$$

$$y(t_0) = 0, \quad (16)$$

wobei wir den Ursprung des Koordinatensystems an den Fuß der Athletin gesetzt haben und L die Wurfweite bezeichnet. Die Trajektorie der Wurfgeschosse errechnet sich zu

$$x(t) = v_{0,x}t \quad (17)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t + h, \quad (18)$$

wobei $v_{0,\alpha}$ die Anfangsgeschwindigkeit in Richtung $\alpha \in \{x, y\}$ bezeichnet. Für diese Geschwindigkeiten gilt $v_{0,x} = v_0 \cos \gamma$ und $v_{0,y} = v_0 \sin \gamma$ mit $\gamma = \pi/4$. Aus den Gleichungen (15) und (16) folgt nun

$$t_0 = \frac{L}{v_{0,x}} \quad (19)$$

$$t_0 = \frac{v_{0,y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0,y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}, \quad (20)$$

womit wir v_0 bestimmen können indem wir die entstehende Gleichung

$$v_0^2 + v_0 \sqrt{v_0^2 + 4hg} - 2Lg = 0 \quad (21)$$

nach v_0 auflösen. Dafür schieben wir den Wurzelterm auf die rechte Seite und quadrieren die Gleichung

$$(v_0^2 - 2Lg)^2 = v_0^2(v_0^2 + 4hg) \Leftrightarrow v_0^2 = \frac{4L^2g^2}{4Lg + 4hg} \quad (22)$$

$$\Rightarrow v_0 = \pm \frac{L\sqrt{g}}{\sqrt{L+h}}. \quad (23)$$

Die anfängliche kinetische Energie lautet also

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2} \frac{L^2g}{L+h}. \quad (24)$$

Setzen wir die Zahlenwerte $h = 1.8 \text{ m}$ und $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, so erhalten wir

$$(m, L, E) \in \left\{ (4\text{kg}, 22.63\text{m}, 411\text{J}), (1\text{kg}, 76.80\text{m}, 368\text{J}), (0.8\text{kg}, 80.00\text{m}, 307\text{J}) \right\}. \quad (25)$$

Verwendet man approximativ, daß $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ so erhält man die Werte

$$(m, L, E) \in \left\{ (4\text{kg}, 22.63\text{m}, 419\text{J}), (1\text{kg}, 76.80\text{m}, 375\text{J}), (0.8\text{kg}, 80.00\text{m}, 313\text{J}) \right\}. \quad (26)$$

5. Dämpfung

(25 Punkte)

Wir berechnen erst einmal die Dauer τ eines einzelnen Hüpfvorgangs, d.h. die Zeit, die zwischen zwei nacheinander folgenden Prellvorgängen der Kugel auf der Platte vergangen ist. Bezeichnen wir mit v die anfängliche Geschwindigkeit nach oben, so erhalten wir aus

$$v - g \frac{\tau}{2} = 0 \Rightarrow \tau = \frac{2v}{g}. \quad (27)$$

Hier haben wir verwendet dass aufgrund der Zeitumkehrinvarianz des Problems die Dauer des Hochsteigens der Kugel gleich der Dauer des Fallens ist. Die kann natürlich auch explizit nachgerechnet werden. Die Geschwindigkeit der Kugel nach oben ist nach dem ν -ten Prellvorgang gleich $v(\nu) = f^\nu u$ mit anfänglicher Geschwindigkeit $u = \sqrt{2gh}$. Die Gesamtdauer nach n Hüpfvorgängen $T(n)$ ist also gegeben durch

$$T(n) = T_0 + \sum_{\nu=1}^n \tau(\nu) = T_0 + \sum_{\nu=1}^n a f^\nu \quad (28)$$

mit $a = 2\sqrt{2h/g}$ und $T_0 = \sqrt{2gh}$. Hier bezeichnet T_0 die Zeit bis zum ersten Prellvorgang. Dieser Ausdruck kann auf die Form der geometrischen Summe gebracht werden. Da die entsprechende Reihe für $|f| < 1$ konvergiert, erhalten wir für die Dauer von unendlichen vielen Prellvorgängen das endliche Resultat

$$T = T_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = T_0 - a + a \sum_{\nu=0}^{\infty} f^\nu = T_0 - a + \frac{a}{1-f}. \quad (29)$$

Auflösen nach f ergibt

$$f = \frac{T - T_0}{T - T_0 + a}. \quad (30)$$

Für die Zahlenwerte $T = 30 \text{ sec}$ und $h = 50 \text{ cm}$ erhält man $f = 0.98$.