

## Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 4

Dr. P. P. Orth

Abgabe und Besprechung 22.11.2013

## 1. Kronecker und Levi-Civita Symbole (10 + 5 + 5 + 10 + 5 + 10 + 5 = 50 Punkte)

- (a) Beweisen Sie die Relation
- $\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$
- .

Es muss gelten, dass  $j \neq k$  und  $l \neq m$ , da ansonsten der  $\epsilon$ -Tensor verschwindet. Die zu beweisende Relation erfüllt diese Bedingung, d.h. die rechte Seite verschwindet für  $j = k$  oder  $l = m$  oder  $j = k = l = m$ .

Für festes  $j \neq k$  und  $l \neq m$  verschwindet der  $\epsilon$ -Tensor nur dann nicht, falls  $i \neq j$  und  $i \neq k$ , bzw.  $i \neq l$  und  $i \neq m$ , gilt. Daher ist  $\epsilon_{ijk}$  und  $\epsilon_{ilm}$  nur einmal in der Summe von  $i = 1, 2, 3$  von Null verschieden. Damit das Produkt nicht verschwindet, muß dass der Fall für das gleiche  $i$  sein. Also müssen die Paare  $(j, k)$  und  $(l, m)$  aus den gleichen zwei Zahlen gezogen werden. Wenn das nicht der Fall ist, verschwindet die linke, aber offensichtlich auch die rechte Seite.

Falls die Paare  $(j, k)$  und  $(l, m)$  aus den gleichen zwei Zahlen gezogen werden gibt es zwei Möglichkeiten, erstens  $j = l$  und  $k = m$  oder  $j = m$  und  $k = l$ . Im ersten Fall finden wir  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = +1$ , im zweiten Fall finden wir  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ikj} = -(\epsilon_{ijk})^2 = -1$ . Dies gilt auch für die rechte Seite der Formel, womit diese bewiesen ist.

- (b) Wie verhält sich das Kreuzprodukt der Vektoren
- $\mathbf{a}$
- und
- $\mathbf{b}$
- unter einer (aktiven) Inversion der Vektoren
- $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a}$
- ,
- $\mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{b}$
- ?

Es gilt dass  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b})$ . Das Kreuzprodukt also invariant unter einer aktiven Inversion. Dies ist die Eigenschaft eines sogenannten axialen Vektors. Ein Vektor, der sein Vorzeichen umdreht bei einer (aktiven) Inversion (so wie der Orts- oder Impulsvektor) wird als polarer Vektor bezeichnet.

- (c) Zeigen Sie, daß
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- .

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{jki} a_i b_j c_k = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{kij} a_i b_j c_k = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (1)$$

wegen der zyklischen Eigenschaft des  $\epsilon$ -Tensors.

- (d) Zeigen Sie, daß
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- das Volumen eines Parallelepipedes mit Seitenlängen
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
- ist. Was passiert im Falle, daß zwei Vektoren parallel sind?

Die Fläche  $A$  des Parallelogramms, das von den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannt wird ist gegeben durch

$$A = \text{Grundseite} \times \text{Höhe} = bc \sin \phi, \quad (2)$$

wobei wir  $b$  als Grundseite und  $c \sin \phi$  also Höhe gewählt haben. Der Winkel  $\phi$  ist als der Winkel zwischen  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  definiert. Die Formel ist anschaulich und folgt direkt aus der Beobachtung  $A = (b + l)h - 2 \frac{1}{2}lh$  wobei  $b = |\mathbf{b}|$ ,  $h = |\mathbf{c}| \sin \phi$  und  $l = |\mathbf{c}| \cos \phi$ .

Wählen wir  $\mathbf{b}$  entlang der  $x$ -Achse und  $\mathbf{c}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene, so erhalten wir aus

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_x c_y \end{pmatrix} \right| = bc \sin \phi. \quad (3)$$

Das Volumen des Parallelepipeds ist gegeben durch

$$V = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}. \quad (4)$$

Dies folgt durch Zerschneiden des Parallelepipeds analog zur Flächenformel für das Parallelogramm. Wir erhalten daher

$$V = Aa \cos \theta = a|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cos \theta = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad (5)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen der Senkrechten auf der Ebene, die von  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannt wird und  $\mathbf{a}$  ist. Wir wissen ja bereits, dass das Kreuzprodukt  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  senkrecht auf sowohl  $\mathbf{b}$  als auch  $\mathbf{c}$  steht. Dies folgt direkt aus der antisymmetrischen Eigenschaft des  $\epsilon$ -Tensors.

Falls zwei der Vektoren parallel sind, verschwindet offensichtlich das Volumen des Parallelepipeds. In der Formel folgt das direkt aus  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  und der Formel, die Sie in Aufgabenteil (c) bewiesen haben.

- (e) Benutzen Sie Aufgabenteil (d) um der Determinantenfunktion eine anschauliche Interpretation zu geben. Was ist die Determinante einer Matrix, in der zwei Zeilen oder Spalten Vielfache voneinander sind ?

Es gilt

$$\det A = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad (6)$$

wobei  $\mathbf{a}_i$  die Zeilen der Matrix  $A$  darstellen. Die Determinante einer Matrix beschreibt also das Volumen des Parallelepipeds, das durch die Zeilenvektoren der Matrix  $A$  aufgespannt wird. Daher verschwindet die Determinante falls zwei Zeilen Vielfache voneinander sind, die Vektoren also (anti-)parallel sind.

Für die Spalten folgt das gleiche aus der Beobachtung, dass  $\det A^T = \det A$ , wobei  $A_{ij}^T = A_{ji}$  die transponierte Matrix darstellt. Dies kann man wie folgt beweisen

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^3 a_{i\sigma(i)} \\ &\stackrel{j=\sigma^{-1}(i)}{=} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=j}^3 a_{\sigma^{-1}(j)j} \stackrel{\tau=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\tau \in S_3} \text{sign}(\tau^{-1}) \prod_{i=j}^3 a_{\tau(j)j} \\ &= \sum_{\tau \in S_3} \text{sign}(\tau) \prod_{i=j}^3 a_{\tau(j)j} = \det A^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Hier bezeichnet  $S_3$  die Gruppe der Permutationen des Tupels (123) und  $\text{sign}(\sigma)$  gibt an, ob die Permutation  $\sigma \in S_3$  eine zyklische Vertauschung entspricht, für die  $\text{sign}(\sigma) = 1$  gilt, oder einer anti-zyklischen Vertauschung, für die  $\text{sign}(\sigma) = -1$  gilt. Im vorletzten Schritt haben wir verwendet, daß  $\text{sign}(\tau^{-1}) = \text{sign}(\tau)^{-1} = \text{sign}(\tau)$ , da  $\text{sign}(\tau) = \pm 1$ .

- (f) Berechnen Sie  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ .  
Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \mathbf{e}_i \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m = \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \mathbf{e}_i \epsilon_{kij} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m \\ &= \sum_{i,j,l,m=1}^3 \mathbf{e}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i [a_j b_i c_j - a_j b_j c_i] \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).\end{aligned}\quad (8)$$

Dies wird auch als „bac-cab“-Regel bezeichnet.

- (g) Berechnen Sie  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$  sowie  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2$ .  
Eine direkte Berechnung ergibt

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} c_l d_m = \sum_{j,k,l,m=1}^3 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= \sum_{j,k=1}^3 [a_j b_k c_j d_k - a_j b_k c_k d_j] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).\end{aligned}\quad (9)$$

Aus der vorherigen Rechnung folgt direkt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \theta) = a^2 b^2 \sin^2 \theta. \quad (10)$$

## 2. Kugelkoordinaten

(5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Basisvektoren der Kugelkoordinaten  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  mit  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  
 $\mathbf{e}_\theta = \partial \mathbf{e}_r / \partial \theta / |\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta|$  und  $\mathbf{e}_\phi = \partial \mathbf{e}_r / \partial \phi / |\partial \mathbf{e}_r / \partial \phi|$ .

Die orthonormierten Basisvektoren der Kugelkoordinaten sind gegeben durch

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \partial \mathbf{e}_r / \partial \theta / |\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta| = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)^T \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \partial \mathbf{e}_r / \partial \phi / |\partial \mathbf{e}_r / \partial \phi| = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)^T. \quad (13)$$

- (b) Drücken Sie den Ortsvektor einer Trajektorie  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$  in der Kugelkoordinatenbasis aus.

Der Ortsvektor in Kugelkoordinatenbasis lautet

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z = r(t)\mathbf{e}_r. \quad (14)$$

mit  $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$ .

- (c) Drücken Sie den Geschwindigkeitsvektor einer Trajektorie  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$  in der Kugelkoordinatenbasis aus.

Der Geschwindigkeitsvektor in Kugelkoordinatenbasis lautet

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi}\dot{\phi}\right) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi), \quad (15)$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$  und  $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \mathbf{e}_\phi$ .

- (d) Drücken Sie den Beschleunigungsvektor einer Trajektorie  $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$  in der Kugelkoordinatenbasis aus.

Der Beschleunigungsvektor in Kugelkoordinatenbasis lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) + \dot{r}(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) + r(\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi) \\ & + r\left[\dot{\theta}\left(\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\phi}\dot{\phi}\right) + \sin\theta\dot{\phi}\left(\frac{\partial\mathbf{e}_\phi}{\partial\phi}\dot{\phi}\right) + \cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Verwenden wir nun dass  $\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = \mathbf{e}_r$ ,  $\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\phi} = \cos\theta\mathbf{e}_\phi$ ,  $\frac{\partial\mathbf{e}_\phi}{\partial\phi} = -\sin\theta\mathbf{e}_r - \cos\theta\mathbf{e}_\theta$  und fassen Terme zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \mathbf{e}_r\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right] + \mathbf{e}_\theta\left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right] \\ & + \mathbf{e}_\phi\left[2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right]. \end{aligned} \quad (17)$$

### 3. Kräfte

(15 Punkte)

Wie groß muss die horizontale Kraft  $F$  in Abb. 2 (links) sein, die ständig auf  $m$  ausgeübt werden muss, damit sich  $m_1$  und  $m_2$  relativ zu  $m$  nicht bewegen? Vernachlässigen Sie die Reibung.

Wir müssen die Newton'schen Gleichungen für die drei Massen aufstellen. Mit den Konventionen von Abb. 2 lauten sie

$$m_2 a_2 = m_2 g + F_s \quad (18)$$

$$m_1 a_1 = -F_s \quad (19)$$

$$(m + m_2)a = F + F_s. \quad (20)$$

Hier bezeichnet  $F_s$  die Seilspannung im Seil und  $F$  die extern angelegte Kraft. Beachte dass es keine Reibung zwischen der Masse  $m_1$  und  $m$  gibt, so dass diese nicht auf der linken Seite in Gl. (20) auftaucht. Hier haben wir die  $x$ -Achse so gelegt, dass sie nach entlang von  $F$  (d.h. in Abb. 2 nach rechts) zeigt. Die Richtung von  $F_s$  haben wir in  $-x$ -Richtung gewählt.  $F_s$  zeigt also in horizontaler Richtung in die entgegengesetzte Richtung von  $F$  zeigt (d.h. in Abb. 2 nach links). Das sieht man daran direkt an Gl. (19). Die Seilkraft taucht in Gl. (20) auf, da diese über die Rolle, die fest mit der Masse  $m$  verbunden ist, eine Kraft auf die Masse  $m$  ausübt (actio-reaction Prinzip).

Die Bedingung, dass sich die Massen relativ zueinander nicht bewegen lauten dann

$$a_2 = 0 \quad (21)$$

$$a_1 = a. \quad (22)$$

Lösen wir die Newton'schen Gleichungen unter den Bedingungen, so erhalten wir für die externe Kraft

$$F = (m + m_1 + m_2)\frac{m_2}{m_1}g. \quad (23)$$

### 4. Stabile Lage

(15 Punkte)

Ein Brett mit der Masse  $m$  und der Länge  $\sqrt{3}R$  liegt in einer glatten, kreisförmigen Mulde mit dem Radius  $R$ . An dem einen Ende des Bretts befindet sich eine kleine Masse  $m/2$ . Berechnen Sie den Winkel  $\theta$  (siehe Abb. 2 rechts), in dem das Brett liegt,

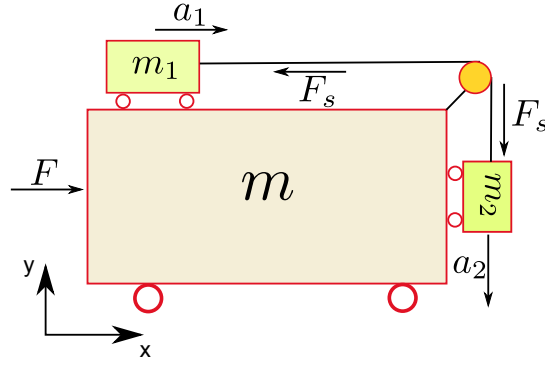


Abbildung 1: Abbildung für Aufgabe 3.

wenn es sich im Gleichgewicht befindet. *Hinweis:* der Schwerpunkt des Bretts mit der daraufliegenden Masse berechnet sich aus der Formel  $x_{CM} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$  wobei  $x_1$  und  $x_2$  die Abstände der beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  von einem festgelegten Punkt (z.B. dem Mittelpunkt des Bretts) sind. Der Schwerpunkt des Brettes alleine liegt dabei offensichtlich im Mittelpunkt des Bretts.

Wir finden die Gleichgewichtslage des Bretts in der Mulde aus der Bedingung, dass dies ein Zustand minimaler potentieller Energie ist. Das Brett befindet sich im Gravitationsfeld und der Zustand minimaler Energie ist derjenige für den die  $y$ -Komponente des Schwerpunkts minimal ist.

Der Schwerpunkt des Systems (Brett + Masse  $m/2$ ) befindet sich im Punkt

$$x_{CM} = \frac{1}{2} \sqrt{3} R + \frac{m \cdot 0 + \frac{m}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} R}{m + \frac{m}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{3} R, \quad (24)$$

wobei der Punkt  $x = 0$  am linken Rand des Bretts liegt. Der Schwerpunkt liegt also rechts vom Mittelpunkt (auf der Seite der kleinen Masse  $m/2$ ) und zwar im Abstand  $\frac{1}{6} \sqrt{3} R$  vom Mittelpunkt aus.

Das Brett berührt den Kreis an zwei Punkten. Zeichnen wir zwei Vektoren vom Kreismittelpunkt zu diesen beiden Punkten, so ist der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren gegeben durch

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}. \quad (25)$$

Das folgt aus einer einfachen geometrischen Überlegung (siehe Fig. 2). Wir können also den Vektor vom einen Punkt auf dem Kreis zum anderen schreiben als

$$\mathbf{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \varphi_0) - \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi + \varphi_0) - \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Es genügt dabei  $\varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$  anzunehmen. Es gilt, dass  $|\mathbf{r}(\varphi)| = \sqrt{3}R$ . Im folgenden setzen wir  $R = 1$  der Einfachheit halber. Das Ergebnis für  $\theta$  hängt natürlich nicht von  $R$  ab. Der Schwerpunkt befindet sich nun bei

$$\mathbf{r}_{CM} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \mathbf{r}(\varphi) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cos(\varphi + \varphi_0) + \cos(\varphi) \\ 2 \sin(\varphi + \varphi_0) + \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Wir bestimmen den Winkel  $\varphi$  der dem stabilen Zustand entspricht, indem wir die  $y$ -

Komponente des Schwerpunkts minimieren

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dr_{CM,y}}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_m} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cos(\varphi_m + \varphi_0) + \cos(\varphi_m) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 [\cos(\varphi_m) \cos(\varphi_0) - \sin(\varphi_m) \sin(\varphi_0)] + \cos(\varphi_m) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 [\cos(\varphi_0) - \tan(\varphi_m) \sin(\varphi_0)] + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \tan(\varphi_m) = \frac{1}{\tan(\varphi_0)} + \frac{1}{2 \sin(\varphi_0)} &= 0, \quad (28)
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt  $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$  eingesetzt haben. Das Brett befindet sich also in einer stabilen Lage für

$$\varphi_m \in \{0, \pi, \dots\}. \quad (29)$$

Für den Winkel  $\theta$  folgt dann

$$\tan \theta = \frac{|r_y(\varphi_m)|}{|r_x(\varphi_m)|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \equiv 30^\circ. \quad (30)$$

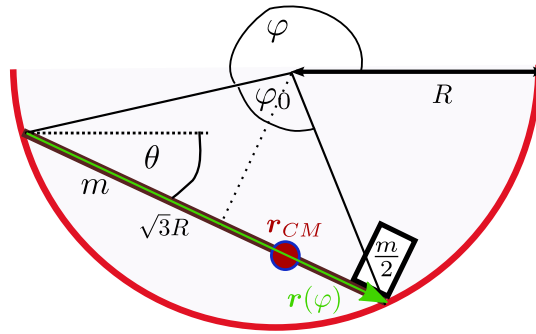


Abbildung 2: Abbildung für Aufgabe 4.