

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 5

Dr. P. P. Orth

Abgabe und Besprechung 29.11.2013

1. Messung der Gravitationsbeschleunigung

(15 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert der Fallbeschleunigung g aus den Messwerten von m , M , h und v .

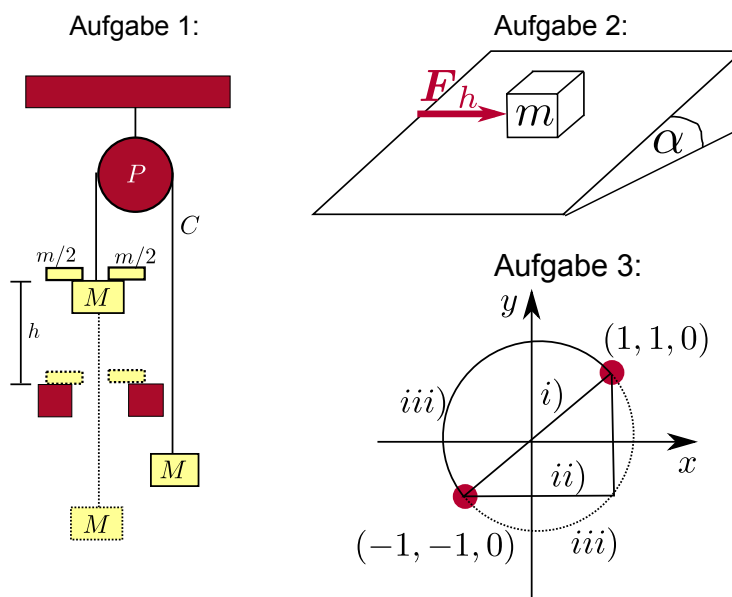


Abbildung 1: Anordnung zum Messen der Fallbeschleunigung.

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die zwei Massen lauten

$$(M + m)a_1 = (M + m)g - T \quad (1)$$

$$Ma_2 = Mg - T. \quad (2)$$

Hier haben wir den Vektor der Seilspannung $\mathbf{T}$ (mit $|\mathbf{T}| = T$) auf beiden Seiten in die Richtung entgegengesetzt zur Gravitationskraft gewählt, und positive Auslenkungen der beiden Massen jeweils nach unten (in Richtung der Gravitationskraft). Da beide Massen über das Seil verbunden sind, gilt offensichtlich $v_1 = -v_2$ und daher $a_1 = -a_2$. Damit können wir a_2 aus dem Gleichungssystem eliminieren und nach a_1 und T auflösen. Wir erhalten

$$T = M(g + a_1) \quad (3)$$

$$a_1 = \frac{m}{2M + m}g. \quad (4)$$

Da wir die Gravitationsbeschleunigung messen wollen, lösen wir nach g auf

$$g = \frac{2M + m}{m}a_1. \quad (5)$$

Schließlich müssen wir noch a_1 durch die beiden Meßgrößen h und v ausdrücken, wobei gilt $v = a_1 t$ und $t = \sqrt{2h/a_1}$ und somit $a_1 = v^2/2h$. Damit finden wir für g das Ergebnis

$$g = \frac{(2M + m)v^2}{2mh} . \quad (6)$$

2. Raue und schiefe Ebene

(10 + 10 = 20 Punkte)

Wie in Abb. 1 gezeigt, ruhe ein Teilchen mit dem Gewicht $m = Mg$ auf einer rauen, schiefen Ebene, die einen Winkel α mit der Horizontalen bildet.

- (a) Bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass die Haftreibungszahl $\mu = 2 \tan \alpha$ ist, die geringste quer zur Neigung der Ebene wirkende, *horizontale* Kraft $\mathbf{F}_h^{\min}$, die das Teilchen in Bewegung setzt.

Die Gewichtskraft $\mathbf{F}_g = M\mathbf{g}$ mit $|\mathbf{F}_g| = Mg = m$, die auf das Teilchen wirkt, teilt sich anteilig in eine Kraft senkrecht zur Ebene und tangential zur Ebene auf $\mathbf{F}_t$. Die Komponente senkrecht zur Ebene wird durch die Normalkraft $\mathbf{N}$, die von der Oberfläche auf das Teilchen ausgeübt wird, kompensiert. Einfache geometrische Überlegungen ergeben, dass die Größe der Normal- und Tangentialkraft gegeben sind als

$$N = F_g \cos \alpha \quad (7)$$

$$F_t = F_g \sin \alpha . \quad (8)$$

Offensichtlich verschwindet die Tangentialkomponente für $\alpha = 0$. Wählen wir ein Koordinatensystem in der schiefen Ebene mit positiver x -Richtung in Richtung der angreifenden Horizontalkraft $\mathbf{F}_h$ und positiver y -Richtung entlang der Tangentialkraft, so lassen sich die beiden Kräfte schreiben als

$$\mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ F_g \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_h = \begin{pmatrix} F_h \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (10)$$

Zu diesen beiden Kräften kommt nun noch die Reibungskraft $\mathbf{F}_f$ hinzu, die entgegengesetzt zu $\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_h$ zeigt. Es gilt $|\mathbf{F}_f| \leq \mu N$.

Das Teilchen setzt sich gerade in Bewegung, wenn wir eine solche horizontale Kraft $\mathbf{F}_h$ ausüben, daß $|\mathbf{F}_f| = \mu N = \mu F_g \cos \alpha$. Führen wir den Winkel θ als den Winkel zwischen der Richtung von $\mathbf{F}$ und der y -Achse (= Richtung von $\mathbf{F}_t$) ein, so können wir schreiben

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_h = \sqrt{F_h^2 + (F_g \sin \alpha)^2} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (11)$$

wobei $\tan \theta = F_h/F_t$. Für $F_h = F_h^{\min}$ gilt nun die Bedingung

$$\mathbf{F}(\mathbf{F}_h^{\min}) = \mathbf{F}_f(\mathbf{F}_t^{\min}) \quad (12)$$

oder $|\mathbf{F}(\mathbf{F}_h^{\min})| = \mu N$. Daher erhalten wir

$$(F_h^{\min})^2 + (F_g \sin \alpha)^2 = (\mu F_g \cos \alpha)^2 \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow (F_h^{\min})^2 = (2F_g \tan \alpha \cos \alpha)^2 - (F_g \sin \alpha)^2 \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow F_h^{\min} = \sqrt{3} F_g \sin \alpha , \quad (15)$$

wobei wir $\mu = 2 \tan \alpha$ verwendet haben und $F_g = Mg = m$ (laut Aufgabenstellung bezeichnet m das Gewicht = die Größe der Gewichtskraft des Teilchens).

- (b) In welche Richtung bewegt sich das Teilchen ?

Wir erhalten den Winkel aus der Beziehung

$$\tan \theta = \frac{F_h^{\min}}{F_t} = \frac{\sqrt{3}Mg \sin \alpha}{Mg \sin \alpha} = \sqrt{3} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ. \quad (17)$$

3. Konservative Kräfte

(5 + 5 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben seien zwei Vektorfelder $\mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{e}_x - 2yz\mathbf{e}_y - y^2\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{F}_2 = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y$, die Kraftfelder beschreiben.

- (a) Bestimmen Sie ob diese Kräfte konservativ sind.

Um zu bestimmen, ob die Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ konservativ sind, berechnen wir die Rotation, da für ein konservatives Vektorfeld gilt, daß $\nabla \times \mathbf{F}_i = 0$. Wir erhalten

$$\nabla \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{e}_1(\partial_2 F_{1,3} - \partial_3 F_{1,2}) + \mathbf{e}_2(\partial_3 F_{1,1} - \partial_1 F_{1,3}) + \mathbf{e}_3(\partial_1 F_{1,2} - \partial_2 F_{1,1}) \quad (18)$$

$$= \mathbf{e}_1(-2y + 2y) + \mathbf{e}_2 0 + \mathbf{e}_3 0 = 0. \quad (19)$$

Das Kraftfeld $\mathbf{F}_1$ ist also konservativ.

Für $\mathbf{F}_2$ erhalten wir

$$\nabla \times \mathbf{F}_2 = -2\mathbf{e}_3. \quad (20)$$

Dieses Kraftfeld ist also nicht konservativ.

- (b) Bestimmen Sie das Potential zu den Kräften, die konservativ sind.

Da nur $\mathbf{F}_1$ konservativ ist, existiert nur für dieses Kraftfeld ein Potential $\mathbf{F}_1 = -\nabla\phi$. Man kann das Potential entweder versuchen zu erraten, oder es ausrechnen, indem man das Wegintegral entlang der drei geraden Pfade C_1 von $(0,0,0)$ nach $(x,0,0)$, gefolgt von C_2 von $(x,0,0)$ nach $(x,y,0)$ und schliesslich C_3 von $(x,y,0)$ nach (x,y,z) berechnet. Das Potential folgt dann als

$$\phi(x,y,z) = - \int_{C_1+C_2+C_3} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1. \quad (21)$$

Beachte, dass für eine konservative Kraft, der Wert eines Wegintegrals offensichtlich unabhängig vom Weg ist und nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt. Ausserdem ist das Potential nur bis auf eine Konstante bestimmt, die beim Ableiten $\mathbf{F}_1 = -\nabla\phi$ wegfällt.

Wir wollen nun das Wegintegral entlang der drei Wege C_i berechnen.

C_1 : Parametrisierung $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{e}_x$ mit $t \in [0, x]$. Daher $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{e}_x$ und

$$\int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 = \int_0^x dt \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1(t)) = \int_0^x dt 2t = x^2. \quad (22)$$

C_2 : Parametrisierung $\mathbf{r}_2(t) = x\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y$ mit $t \in [0, y]$. Daher $\dot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{e}_y$ und

$$\int_{C_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 = \int_0^y dt \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_2(t)) = \int_0^y dt (-2t \cdot 0) = 0. \quad (23)$$

C_3 : Parametrisierung $\mathbf{r}_3(t) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_z$ mit $t \in [0, z]$. Daher $\dot{\mathbf{r}}_3(t) = \mathbf{e}_z$ und

$$\int_{C_3} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 = \int_0^z dt \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_3(t)) = \int_0^z dt (-y^2) = -zy^2. \quad (24)$$

Für das Potential erhalten wir also

$$\phi(x, y, z) = \int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 + \int_{C_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 + \int_{C_3} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 = -x^2 + y^2 z. \quad (25)$$

Man überprüft leicht, daß $-\nabla\phi = \mathbf{F}_1$ wie gefordert.

- (c) Berechnen Sie für beide Kraftfelder die Arbeit, die man verrichten muss, um ein Teilchen vom Punkt $(-1, -1, 0)$ zum Punkt $(1, 1, 0)$ zu bewegen entlang der drei verschiedenen Wege:
- i) direkter Weg
 - ii) entlang der direkten Pfade von $(-1, -1, 0)$ nach $(1, -1, 0)$ und dann von $(1, -1, 0)$ nach $(1, 1, 0)$
 - iii) entlang der zwei Halbkreise die in der x - y -Ebene liegen und die beiden Punkte verbinden (siehe Abb. 1).

Für ein konservatives Kraftfeld wie $\mathbf{F}_1$ wissen wir bereits, daß das Wegintegral unabhängig vom Weg ist. Daher erhalten wir im Fall von $\mathbf{F}_1$ für alle drei Wege das Ergebnis

$$W = \int_{C_i} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 = - \int_{C_i} \mathbf{r} \cdot \nabla\phi = \phi(-1, -1, 0) - \phi(1, 1, 0) = 0. \quad (26)$$

Hier bezeichnet W , die Arbeit, die das Kraftfeld verrichtet. Wenn wir das Kraftfeld als (extern) gegeben ansehen und das Teilchen in dem Feld bewegen wollen, müssen wir die Arbeit $-W$ aufwenden.

Für das Kraftfeld $\mathbf{F}_2$ müssen wir alle vier Wegintegrale separat berechnen. Wir erhalten

- i): Parametrisierung $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ mit $t \in [0, 1]$ und $\mathbf{a} = (-1, -1, 0)$ und $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ und daher $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2, 2, 0)$. Es gilt

$$\mathbf{r}_1(t) = (-1 + 2t, -1 + 2t, 0) \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1(t) = (2, 2, 0). \quad (28)$$

Daher erhält man

$$\int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2 = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_1(t) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_1(t)) = \int_0^1 dt (2, 2, 0) \cdot (-1 + 2t, 1 - 2t, 0) = 0. \quad (29)$$

- ii): Erstes Teilstück: Parametrisierung $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a})$ mit $t \in [0, 1]$ und $\mathbf{a} = (-1, -1, 0)$ und $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 0)$ und daher $\mathbf{b}_1 - \mathbf{a} = (2, 0, 0)$. Es gilt

$$\mathbf{r}_1(t) = (-1 + 2t, -1, 0) \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1(t) = (2, 0, 0). \quad (31)$$

Daher erhält man

$$\int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2 = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_1(t) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_1(t)) = \int_0^1 dt (2, 0, 0) \cdot (-1, 1 - 2t, 0) = -2. \quad (32)$$

Zweites Teilstück: Parametrisierung $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b}_1 + t(\mathbf{b} - \mathbf{b}_1)$ mit $t \in [0, 1]$. Es gilt

$$\mathbf{r}_2(t) = (1, -1 + 2t, 0) \quad (33)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2(t) = (0, 2, 0). \quad (34)$$

Daher erhält man

$$\int_{C_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2 = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_2(t) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2(t)) = \int_0^1 dt(0, 2, 0) \cdot (-1 + 2t, -1, 0) = -2. \quad (35)$$

Für den gesamten Weg erhalten wir also entlang von Weg ii) das Ergebnis

$$\int_{C_1+C_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2 = -4. \quad (36)$$

iii): Strecke im Uhrzeigersinn: Parametrisierung $\mathbf{r}_1(t) = \sqrt{2}(\cos t, \sin t, 0)$ mit $t \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$. Es gilt $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = \sqrt{2}(-\sin t, \cos t, 0)$ und

$$\int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2 = 2 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} dt(-\sin^2 t - \cos^2 t) = 2\pi. \quad (37)$$

Strecke gegen den Uhrzeigersinn: Parametrisierung $\mathbf{r}_1(t) = \sqrt{2}(\cos t, \sin t, 0)$ mit $t \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$. Es gilt $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = \sqrt{2}(-\sin t, \cos t, 0)$ und

$$\int_{C_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2 = 2 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} dt(-\sin^2 t - \cos^2 t) = -2\pi. \quad (38)$$

4. Integrale

(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 15 = 45 Punkte)

Bestimmen Sie die folgende. Integrale. Verwenden Sie zum Beispiel die Methoden der Substitution, partiellen Integration und Ableitung nach einem Parameter (siehe Übungsblatt 2)

(a)

$$I_1 = \int_0^1 dx e^{\sqrt{x}} \stackrel{y=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 dy 2ye^y = 2 \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda y} \Big|_{\lambda=1} = 2 \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 e^{\lambda y} \Big|_{\lambda=1} \quad (39)$$

$$= 2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} (e^\lambda - 1) \right) \Big|_{\lambda=1} = 2 \left(-\frac{e^\lambda}{\lambda^2} + \frac{e^\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \Big|_{\lambda=1} = 2(-e + e + 1) = 2. \quad (40)$$

(b)

$$I_2 = \int_0^\pi dx \sin^2 x = -\sin x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi dx \cos^2 x = \pi - \int_0^\pi \sin^2 x \quad (41)$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \int_0^\pi dx \sin^2 x = \frac{\pi}{2}. \quad (42)$$

(c)

$$I_3 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \stackrel{y=x/|a|}{=} \int_{x_1/|a|}^{x_2/|a|} dy \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad (43)$$

$$\stackrel{y=\sin z}{=} \int_{\sin^{-1}(x_1/|a|)}^{\sin^{-1}(x_2/|a|)} dz \frac{\cos z}{\cos z} = \sin^{-1}(x_2/|a|) - \sin^{-1}(x_1/|a|), \quad (44)$$

wobei wir angenommen haben, daß $|a| \geq x_1$ und $|a| \geq x_2$ damit die Wurzel im Integranden reell ist.

(d)

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + 1} \stackrel{y=x/|a|}{=} \frac{|a|}{a^2} \int_0^\infty dy \frac{1}{y^2 + 1} \quad (45)$$

$$\stackrel{y=\tan z}{=} \frac{1}{|a|} \int_0^{\pi/2} dz \frac{\cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{\pi}{2|a|}. \quad (46)$$

(e)

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} dx \frac{\cos x}{2 + \sin x} \stackrel{y=2+\sin x}{=} \int_2^3 \frac{dy \cos x}{y \cos x} = \ln(3/2). \quad (47)$$

(f)

$$I_6 = \int_0^1 dx 2^x = \int_0^1 e^{x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} (e^{\ln 2} - 1) = \frac{1}{\ln 2}. \quad (48)$$

(g) Bestimmen Sie das Verhalten der Gamma-Funktion

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx x^n e^{-x} \quad (49)$$

für große $n \in \mathbb{R}$. Gehen Sie wie folgt vor. Bestimmen Sie erst den dominanten Beitrag des Integranden, indem Sie den Exponenten maximieren. Finden Sie die dann auch die nächste nicht verschwindende Ordnung von $\Gamma(n-1)$ für große n , indem Sie um das Maximum des Exponenten entwickeln.

Wir können den Integranden schreiben als

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx e^{-x+n \ln x} \stackrel{x=ny}{=} n^{n+1} \int_0^\infty e^{n(\ln y - y)}. \quad (50)$$

Falls die Funktion $f(y)$ ein globales Maximum im Inneren des Integrationsbereichs besitzt (wie in diesem Fall), wird ein Integral der Form $\int_a^b dy e^{nf(y)}$ für groß Werte von n von Beiträgen nahe des globalen Maximums bestimmt. Wenn wir am Verhalten des Integrals für große n interessiert sind, können wir daher die Funktion $f(y)$ nahe des Maximums in eine Taylor-Reihe entwickeln. Wir bestimmen das Maximum aus $f'(y_{\max}) = 0$ und finden $y_{\max} = 1$. Bis zur zweiten Ordnung in $(y - y_{\max})$ lautet die Taylorreihe nahe $y_{\max} = 1$

$$f(y) \approx f(y_{\max}) + \frac{1}{2} f''(y_{\max})(y - y_{\max})^2 = -1 - \frac{1}{2}(y - 1)^2. \quad (51)$$

Das Integral ergibt sich also zu

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^\infty dy e^{n(\ln y - y)} = n^{n+1} \int_0^\infty dy e^{n[-1 - \frac{1}{2}(y-1)^2]} \quad (52)$$

$$= n^{n+1} e^{-n} \int_0^\infty dy e^{-\frac{n}{2}(y-1)^2}. \quad (53)$$

Nun müssen wir nur noch das Gauss Integral berechnen. Dafür gehen wir wieder zurück zur Integrationsvariablen $x = ny$ und erhalten

$$\int_0^\infty \frac{dx}{n} e^{-\frac{1}{2n}(x-n)^2} \stackrel{z=x-n}{=} \int_{-n}^\infty \frac{dz}{n} e^{-\frac{1}{2n}z^2} \stackrel{n \gg 1}{\approx} \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{n} e^{-\frac{1}{2n}z^2} = \frac{\sqrt{2n\pi}}{n} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}. \quad (54)$$

Insgesamt erhalten wir also für große n das Ergebnis (Stirling Formel)

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx e^{-x+n \ln x} = n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (55)$$

Die hier verwendete gebräuchliche Approximationsmethode nennt man „Sattelpunktsnäherung“ oder „Method of Steepest Descent“.