

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014**Prof. Dr. J. Schmalian****Blatt 6****Dr. P. P. Orth****Abgabe und Besprechung 06.12.2013****1. Vektoranalysis I****(20 Punkte)**

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} = 4ye_x + xe_y + 2ze_z$. Berechnen Sie das Flächenintegral $\int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$ über die Oberfläche der Hemisphäre $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ mit $z \geq 0$.

Es gibt drei Möglichkeiten diese Aufgabe zu bearbeiten. Man kann

- i) das Flächenintegral mit Hilfe des Stokes'schen Satzes in ein Wegintegral über den Rand ∂A umformen und dieses berechnen, oder
- ii) den Stokes'schen Satz verwenden, um das Flächenintegral über die Hemisphäre in ein Integral über eine „einfachere“ Fläche mit dem gleichen Rand ∂A umformen und dieses Flächenintegral berechnen, oder
- iii) das Flächenintegral über die Hemisphäre berechnen.

Wir wollen hier alle drei Wege benutzen.

- i) Mit Hilfe des Stokes'schen Satz können wir das Flächenintegral in ein Wegintegral über den Rand der Fläche umformen

$$I = \int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \int_{\partial A} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}. \quad (1)$$

Wir parametrisieren den Rand der Fläche - einen Kreis mit Radius a in der x - y -Ebene - durch

$$\mathbf{r}(t) = a \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = a \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

wobei $t \in [0, 2\pi)$. Das Wegintegral berechnet sich also zu

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial A} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} = \int_0^{2\pi} dt \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt a \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} dt a^2 [-4 \sin^2 t + \cos^2 t] = -3\pi a^2. \end{aligned} \quad (3)$$

- ii) Aufgrund des Stokes'schen Theorems können wir das Flächenintegral über A in ein Flächenintegral über eine andere Fläche A' mit dem gleichen Rand umformen, d.h. es muss gelten dass $\partial A' = \partial A$.

Wir wählen A' zum Beispiel als die Kreisfläche mit Radius a in der x - y -Ebene, d.h. $x^2 + y^2 \leq a^2$. Der Normalenvektor auf dieser Fläche zeigt in Richtung von $\mathbf{e}_z$. Für die Rotation des Vektorfeldes erhalten wir

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Das Flächenintegral liest sich also als

$$\begin{aligned} I &= \int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \int_{A'} d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \int_{A'} ds \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \\ &= \int_{A'} ds(-3) = -3\pi a^2. \end{aligned} \quad (5)$$

- iii) Wir können auch das Flächenintegral über die Hemisphäre berechnen. Hier zeigt der Normalenvektor in Richtung von $\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Für das Flächenintegral erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \int_A ds \mathbf{e}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = -3 \int_A ds \cos \theta \\ &= -3 \int_0^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi a^2 \cos \theta = -6\pi a^2 \int_0^1 d(\cos \theta) \cos \theta = -3\pi a^2. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Vektoranalysis II

(5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} = (x^2 - y^2)\mathbf{e}_x + 2xy\mathbf{e}_y$.

- (a) Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{V}$.

Wir erhalten für die Rotation des Vektorfeldes

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

- (b) Berechnen Sie das Flächenintegral $\int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$ wobei die Fläche A ein Rechteck in der (x, y) Ebene darstellt, das begrenzt ist durch die Linien $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$.

Der Normalenvektor zeigt für diese Fläche entlang $\mathbf{e}_z$. Das Integral berechnet sich zu

$$I = \int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \int_A ds \mathbf{e}_z \cdot (4y\mathbf{e}_z) = \int_0^a dx \int_0^b dy 4y = 2ab^2. \quad (8)$$

- (c) Berechnen Sie das Wegintegral $\oint_{C=\partial A} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}$ entlang des Randes von A und zeigen Sie das Stokes' Theorem erfüllt ist.

Der Weg entlang des Randes ∂A besteht aus vier Segmenten, die wir wie folgt parametrisieren

$$\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{e}_x \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{e}_x, \quad t \in [0, a] \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = a\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{e}_y, \quad t \in [0, b] \quad (10)$$

$$\mathbf{r}_3(t) = (a - t)\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_3(t) = -\mathbf{e}_x, \quad t \in [0, a] \quad (11)$$

$$\mathbf{r}_4(t) = (b - t)\mathbf{e}_y \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_4(t) = -\mathbf{e}_y, \quad t \in [0, b]. \quad (12)$$

Das Wegintegral, das wir mit Hilfe des Stokes'schen Satzes erhalten haben, berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} I' &= \int_{\partial A} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} = \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \\ &= \int_0^a dt t^2 + \int_0^b dt 2at + \int_0^a dt [-(a - t)^2 + b^2] + \int_0^b dt 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \frac{a^3}{3} + ab^2 + (-a^3 + a^3 - \frac{a^3}{3} + b^2a) = 2ab^2. \quad (14)$$

Wir haben gefunden dass $I' = I$. Das Stokes' Theorem ist also wie erwartet erfüllt.

3. Kabelrollen

(20 Punkte)

Ein biegsames Kabel der Länge L und der Massendichte ρ (Einheit $[\rho] = kg/m$) hängt über einer Rolle, deren Masse, Radius und Reibung vernachlässigt werden können. Anfangs befindet sich das Kabel gerade im Gleichgewicht. Das Kabel wird leicht angestoßen, um es aus dem Gleichgewicht zu bringen, und es beschleunigt weiter.

Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit zu dem Zeitpunkt, an dem das Ende von der Rolle wegfällt.

Wir lösen diese Aufgabe mit Hilfe der Energieerhaltung, die besagt, dass die Energie des Systems zu Beginn wenn das Kabel ruht gleich der Energie am Ende in dem Moment in dem das Kabel von der Rolle fliegt gleich ist (natürlich auch zu jedem anderen Zeitpunkt der Bewegung).

Zu Beginn ist das Kabel in Ruhe, die Gesamtenergie E_1 berechnet sich also aus der potentiellen Energie zu

$$E_1 = 2g \int_0^{L/2} dx \rho x = \frac{g\rho L^2}{4}. \quad (15)$$

Sobald das Kabel in Bewegung kommt, wandelt sich potentielle Energie in kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}\rho L v^2$ um. In dem Moment in dem das Kabel von der Rolle fliegt besitzt sie eine kinetische Energie von

$$E_{kin} = E_1 - \int_{-L/2}^{L/2} dx g \rho x = E_1 = \frac{g\rho L^2}{4}. \quad (16)$$

Die Geschwindigkeit des Kabels ist also gegeben als

$$\frac{1}{2}\rho L v^2 = \frac{1}{4}\rho g L^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gL}{2}}, \quad (17)$$

und damit unabhängig von der Massendichte ρ .

4. Geodäten der Ebene

(15 Punkte)

Wir wollen die Euler-Lagrange Gleichungen, die wir in der Vorlesung kennengelernt haben verwenden, um die Geodäten in der zweidimensionalen (t, x) -Ebene zu bestimmen. Eine Geodäte ist dabei der Pfad zwischen gegebenen Punkten $(0, 0)$ und $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ mit der minimalen Länge.

Gehen Sie wie folgt vor. Stellen Sie zuerst ein Integral auf, das minimiert werden soll. Es ist von der Form $S = \int_{t_1}^{t_2} dt f(x, \dot{x}, t)$. In der Vorlesung, haben wir gelernt, dass ein solches Integral von der Funktion $x(t)$ minimiert wird, die die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (18)$$

erfüllt.

Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das Geodätenproblem auf und lösen Sie die Gleichung.

Eine Geodäte ist bestimmt als derjenige Weg zwischen zwei Punkten $(0, 0)$ und $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ der eine minimale Bogenlänge besitzt, d.h.

$$S = \int_{(0,0)}^{\mathbf{a}} ds = \int_0^{a_1} dt \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad (19)$$

ist minimal für die Geodäte $x(t)$. Hier haben wir den Weg parametrisiert als

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

mit $t \in [0, a_1]$ und $x(a_1) = a_2$. Wir bestimmen die Form von $x(t)$ über die Bedingung, dass die Weglänge S minimiert werden soll. Das Integral S ist von der Form $S = \int_{t_1}^{t_2} dt f(x, \dot{x}, t)$ mit $f(\dot{x}) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$. Wir wissen bereits, dass das Integral stationär wird für die Funktion $x(t)$, die die Euler-Lagrange Gleichung löst. Die Euler-Lagrange Gleichung für eine Funktion $f(\dot{x})$ lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = 0. \quad (22)$$

Die rechte Seite verschwindet, da f nicht von x abhängt sondern nur von $\dot{x}$. Da die Zeitableitung verschwindet, gilt

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} &= \text{konst.} \Rightarrow \dot{x} = \text{konst.} \\ \Rightarrow x(t) &= ct + x_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Aus den Randbedingung $x(0) = 0$ und $x(a_1) = a_2$ erhalten wir $c = a_2/a_1$ und $x_0 = 0$. Offensichtlich beschreibt $x(t)$ eine Gerade zwischen den Punkten $(0, 0)$ und (a_1, a_2) . Wir finden also, dass die Geodäte, d.h. die kürzeste Verbindungsstrecke, zwischen zwei Punkten eine Gerade ist.

5. Verlorene Ladung

(20 Punkte)

Ein Wagen der Masse m_1 und Länge L wird von einem hängenden Teilchen der Masse m_2 gezogen. Der Wagen bewegt sich ohne Reibung über den Tisch. Auf dem Wagen befindet sich ein kleiner rechteckiger Stein der Masse m_3 , der nach einer Zeit T nachdem der Wagen losgefahren ist, vom Wagen fällt.

Berechnen Sie den Koeffizienten der kinetischen Reibung μ zwischen dem Stein und dem Wagen.

Welchen Wert von μ erhalten Sie für $g = 10 \text{ m/s}^2$, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $L = 40 \text{ cm}$, $m_3 = 2 \text{ kg}$ und $T = 0.8 \text{ sec}$?

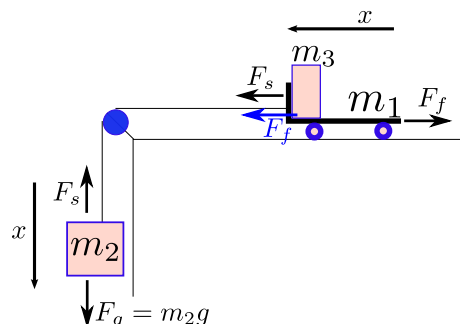


Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe 4.

Mit der Bezeichnung der verschiedenen Kräfte wie in die Abbildung erhalten wir die folgenden Newtonschen Gleichungen für die drei Massen

$$m_1 a_1 = F_s - F_f \quad (24)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - F_s \quad (25)$$

$$m_3 a_3 = F_f . \quad (26)$$

Hier bezeichnet F_s die Seilspannung (*engl.* tension) und $F_f = \mu m_3 g$ die Reibungskraft des Blocks auf dem Wagen. Die Massen m_1 und m_2 sind über das Seil verbunden, so dass gilt dass $v_2 = v_1$ und daher auch $a_2 = a_1$. Zusätzlich wissen wir noch nach welcher Zeit T der Stein vom Wagen fällt. Dies gibt uns eine Relation zwischen den Beschleunigungen a_1 und a_3

$$\frac{1}{2} a_1 T^2 - \frac{1}{2} a_3 T^2 = L , \quad (27)$$

wobei L die Länge des Wagens bezeichnet.

Wir müssen diese vier Gleichungen nun nach den vier Unbekannten $\{a_1, a_3, F_s, \mu\}$ auflösen. Lösen wir nach der Seilspannung F_s auf, so erhalten wir

$$F_s = m_2(g - a_2) = m_1 a_1 + F_f \quad (28)$$

und aus $a_1 = a_2$ dann

$$F_f = m_2 g - a_1(m_1 + m_2) . \quad (29)$$

Lösen wir die dritte Newtonsche Gleichung sowie Gl. (29) nach a_3 auf, so erhalten wir

$$a_3 = \frac{F_f}{m_3} = a_1 - \frac{2L}{T^2} \Rightarrow a_1 = \frac{F_f}{m_3} + \frac{2L}{T^2} = \mu g + \frac{2L}{T^2} . \quad (30)$$

Setzen wir a_1 in Gl. (29) ein, so erhalten wir schliesslich für den Reibungskoeffizienten

$$\mu m_3 g = m_2 g - (m_1 + m_2)(\mu g + \frac{2L}{T^2}) \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{m_2 - (m_1 + m_2) \frac{2L}{gT^2}}{m_1 + m_2 + m_3} . \quad (32)$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhalten wir $\mu = 0.4$.